Feuille d'exercices n° 3

DIAGONALISATION

1 Valeurs propres. Vecteurs propres

Exercice 1. Pour les espaces vectoriels V_i et les applications linéaires $T_i \in \mathcal{L}(V_i)$ suivantes trouver toutes les valeurs propres λ et les espaces propres correspondants $V_i(\lambda)$:

1. $V_1 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_1 l'application nulle ;
2. $V_2 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et $T_2 = \mathrm{Id}_n$ l'application identique ;
3. $V_3 = \mathbb{R}^2$ et T_3 définie par $T_3(z, w) = (z, 0)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$,
4. $V_4 = \mathbb{R}^2$ et T_4 définie par $T_4(z, w) = (-w, z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$,
5. $V_5 = \mathbb{C}^2$ et T_5 définie par $T_5(z, w) = (-w, z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,
6. $V_6 = \mathbb{R}^2$ et T_6 définie par $T_6(z, w) = (5z + w, 5w)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,
7. $V_7 = \mathbb{C}^2$ et T_7 définie par $T_7(z, w) = (z + 5w, 5z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,
8. $V_8 = \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ et T_8 définie par $T_8(z_1, \cdots, z_n) = (z_1 + \cdots + z_n, \cdots, z_1 + \cdots + z_n)$ pour tout $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,
9. $V_9 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_9 un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire pour lequel il existe un entier k tel que T_9^k est l'application nulle).

Exercice 2. On va considérer deux espaces vectoriels de dimension infinie dans cet exercice. La définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre est dans ce cas la même que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension fini.

1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions différentiables un nombre infini de fois et 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit L l'endomorphisme de V défini par $L(f) = f''$. Montrer que les fonctions f_k, définies par $f_k(x) = \cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, sont des vecteurs propres de L. Calculer les valeurs propres associées $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et l'application linéaire $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $S(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Trouver toutes les valeurs propres de S et, pour chaque valeur propre λ, une base de V_λ.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de ϕ_A si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I_n}) = 0$.
2. Soient ϕ_A et $\phi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de ϕ_A et ϕ_B.

2 Polynôme caractéristique

Exercice 4.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier la formule suivante pour le polynôme caractéristique

$$p_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \mathrm{Det}(A)$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer la formule :

$$p_A(X) = -X^3 + \mathrm{Tr}(A)X^2 - Z(A)X + \mathrm{Det}(A) \quad \text{où} \quad Z(A) = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}(A^2)).$$

en supposant la matrice A triangulaire supérieure. (NB : la formule reste vraie sans cette hypothèse, on pourra la montrer dans quelques semaines).

Exercice 5.

1. Donner un exemple d'une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ n'ayant aucune valeur propre. Cela est-il possible pour une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?
2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(V)$ n'ayant aucune valeur propre. Que peut-on dire de la dimension de V ? Montrer que si $\phi \in \mathcal{L}(V)$ n'a aucune valeur propre et U est un sous-espace ϕ-invariant de V, alors la dimension de U est paire.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, de même multiplicité.
2. Montrer que si v est un valeur propre associé à λ, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Exercice 8. On considère la matrice complexe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si elle de rang un.
6. En supposant que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

3 Diagonalisation

Exercice 9. Soit ϕ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chaqun des endomorphismes répondre si il est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

Exercice 10. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e_2),\ u(e_1 + e_3), u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 12. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 13. Soit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer ses sous-espaces propres.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 14. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra utiliser l'exercice 7.

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui donner une telle base.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} \alpha & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \alpha & c_{23} & & c_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 17. On considère V, l'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et u, l'endomorphisme de cet espace, défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 18. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A trouver une solution Z dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$