Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2013
Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 4

Les calculatrices sont autorisées mais totalement inutiles

Dans tout le problème, f est une fonction continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ et (E) est l'équation différentielle :

$$y'' - y = f$$

dans laquelle l'inconnue est y, fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ deux fois dérivable.
Pour tout x réel on note :

$$u(x) = \int_0^x f(t) \operatorname{ch} t \, dt \qquad v(x) = \int_0^x f(t) \operatorname{sh} t \, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = u(x) \operatorname{sh} x - v(x) \operatorname{ch} x.$$

On rappelle que pour toute fonction continue a de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, la fonction A définie pour tout x réel par :

$$A(x) = \int_0^x a(t) \, dt$$

est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ ayant pour dérivée la fonction a.

Première partie

1) a) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad y'' - y = 0$$

dans laquelle l'inconnue est y, fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ deux fois dérivable (on notera x la variable).

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E_0) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, et que $(\operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ en est une base.

2) Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où f est l'application définie par $f(x) = x$. (Avertissement : cette hypothèse est locale à cette question et à la question 6 : elle ne doit pas être utilisée dans les autres questions !).

3) Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où f est l'application définie par :
$f(x) = 4xe^{-x} + e^{2x}$. (Là aussi l'hypothèse est locale à la question !).

4) a) Vérifier que $g(0) = 0$, puis vérifier que les fonctions u, v sont dérivables, et expliciter leurs dérivées.

b) Montrer que $g'(0) = 0$.

c) Montrer que g est solution de (E).

5) Montrer que g est l'unique solution de (E) qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

6) Dans cette question on suppose de nouveau que $f(x) = x$. Sans chercher à calculer les intégrales qui définissent u et v, expliciter g.

Deuxième partie

Dans cette partie T est un réel strictement positif. On suppose f périodique de période T.
On définit une fonction h de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ par $h(x) = g(x+T)$.

7) Montrer que h est solution de (E), puis que $h-g$ est solution de (E_0). En déduire qu'il existe des réels λ et μ pour lesquels :

$$h - g = \lambda \operatorname{ch} + \mu \operatorname{sh}.$$

8) Montrer que pour tout x réel :

$$g(x+T) = g(x) + g(T) \operatorname{ch} x + g'(T) \operatorname{sh} x.$$

9) Montrer que l'équation (E) admet une et une seule solution périodique de période T.

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que la fonction f est à valeurs strictement positives.

10) a) Montrer que pour tout x réel :

$$g'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) f(t)\, dt.$$

b) Soit x un réel. Pour tout réel y, on pose :

$$H_x(y) = \int_0^y \operatorname{ch}(x-t) f(t)\, dt.$$

Montrer que H_x est une fonction strictement croissante.

c) Déduire de ce qui précède que :

$$\text{pour tout } x > 0,\ g'(x) > 0 \qquad \text{et pour tout } x < 0,\ g'(x) < 0.$$

11) Préciser les signes respectifs de $g(x)$ et de $g''(x)$.

12) Pour tout x réel, on pose : $k(x) = \dfrac{g(x)}{\operatorname{ch} x}$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $0 < k'(x)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha < 1$ fixé,

$$e^{\alpha x} = o[g(x)] \text{ quand } x \to +\infty.$$