Université Claude Bernard - Lyon 1 | Printemps 2013
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 1

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Introduction : le nombre d'or

On note (dans tout le problème) $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le "*nombre d'or*").

1) a) Montrer que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

b) Vérifier que $\mathrm{sh}(\ln\varphi) = \dfrac{1}{2}$ et calculer $\mathrm{ch}(\ln\varphi)$.

Première partie : une suite récurrente

On note h l'application de $\mathbf{R}^*$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout réel x non nul par :

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

puis on note f sa restriction de $[1, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

On définit enfin une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant : $u_0 = 1$ puis, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) Justifier que la définition de f comme restriction de h a bien un sens, et préciser le sens de variation de f.

3) Expliciter les valeurs u_1 et u_2 puis montrer que pour tout x réel tel que $u_2 \leq x$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

4) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est une suite croissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

5) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_2 \leq u_n$.

6) a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{4}{9}|u_{n+1} - u_n|.$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_2 - u_1|.$$

7) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

8) Expliquer en quel sens il est raisonnable d'écrire :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Deuxième partie : une présentation des nombres de Fibonacci (peu intéressante ni subtile, mais se rattachant heureusement au programme de révisions)
Pour a et x réels, on note :

$$c_a(x) = \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} a} \qquad \text{et} \qquad s_a(x) = \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{ch} a}.$$

Enfin on définit une suite de réels $(F_n)_{n\geq 0}$ (les "*nombres de Fibonacci*") en posant :

$$F_n = \begin{cases} s_{\ln\varphi}(n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ c_{\ln\varphi}(n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

9) Montrer les deux identités suivantes, valables pour tous réels u et v :

$$(a) \qquad \operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v) = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{ch}^2 v;$$

$$(b) \qquad \operatorname{sh}(u+2v) = 2\operatorname{sh} v \operatorname{ch}(u+v) + \operatorname{sh} u.$$

On admettra pour la suite sans perdre du temps à les montrer les identités suivantes :

$$(c) \qquad \operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v) = \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 v;$$

$$(d) \qquad \operatorname{ch}(u+2v) = 2\operatorname{sh} v \operatorname{sh}(u+v) + \operatorname{ch} u.$$

10) En utilisant la question 9), montrer les identités suivantes, valables pour tous réels n et a :

$$(e) \qquad c_a(n+1)c_a(n-1) - s_a^2(n) = 1;$$
$$(f) \qquad s_a(n+1)s_a(n-1) - c_a^2(n) = -1.$$

11) a) Expliciter F_0 et F_1.
b) Expliciter F_2.

12) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

(Cette relation est connue sous le nom d' "*identité de Cassini*").

13) En utilisant la question 9), montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

14) Montrer que la suite (F_n) est à valeurs entières positives, et différentes de 0 en dehors du terme F_0.

15) Montrer que pour tout $n \geq 1$ les entiers F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

16) Montrer que, quand n tend vers $+\infty$:

$$F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Troisième partie : un autre point de vue sur la suite (u_n).
Dans cette partie, la notation (u_n) désigne la suite étudiée en première partie, et la suite (F_n) celle étudiée en deuxième partie.

17) Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

18) Obtenir à partir de la formule qui précède et de la deuxième partie une nouvelle preuve de la convergence de (u_n) et calculer de nouveau sa limite.

19) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$|u_n - \varphi| \leq |u_{n+1} - u_n|$$

b) Montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\left| \frac{F_{k+1}}{F_k} - \varphi \right| \leq \frac{1}{F_k^2}.$$

20) La suite (a_k) définie pour tout $k \geq 1$ par :

$$a_k = F_k^2 \left| \frac{F_{k+1}}{F_k} - \varphi \right|$$

est-elle ou non une suite convergente ?