I 1) Supposons que m et n existent. Les polynômes X^m et $(1-X)^n$ n'ont alors aucun facteur irréductible commun : ils sont donc premiers entre eux.
Puisque X^m divise $(1-X)^n Q$ tout en étant premier avec $(1-X)^n$, il divise Q (lemme de Gauß). De même puisque $(1-X)^n$ divise $X^m P$ en étant premier avec X^m, il divise P.
II 1 - On obtient sans aucun piège :

$$(*) \qquad 1 = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-k-1}.$$

2 - En appliquant $(*)$ à $n=1$ on lit :

$$1 = (1-X) + X$$

on constate alors que si on pose $U_1 = 1$ et $V_1 = 1$, ceux-ci sont constants donc de degré inférieur ou égal (égal en l'espèce) à $1-1=0$; ils vérifient donc tant (d_1) que (B_1). C'est gagné.
On applique ensuite $(*)$ à $n=2$ et on lit :

$$1 = (1-X)^3 + 3(1-X)^2 X + 3(1-X)X^2 + X^3.$$

On regroupe ensemble les deux premiers termes d'une part, les deux derniers d'autre part et on obtient :

$$1 = (1+2X)(1-X)^2 + (3-2X)X^2.$$

Comme on l'a fait pour $n=1$ on pose alors $U_2 = 1+2X$ et $V_2 = 3-2X$. L'identité qui précède assure qu'ils vérifient (B_2) ; on constate par ailleurs qu'ils sont de degré $1 = 2-1$ et qu'ils vérifient donc (d_2).
Enfin pour $n=3$, par application de $(*)$ puis regroupement entre eux des trois premiers termes d'une part, des trois derniers d'autre part on écrit :

$$\begin{aligned} 1 &= (1-X)^5 + 5(1-X)^4 X + 10(1-X)^3 X^2 + 10(1-X)^2 X^3 + 5(1-X)X^4 + X^5 \\ &= [10X^2 + 5X(1-X) = (1-X)^2](1-X)^3 + [X^2 + 5X(1-X) + 10(1-X)^2]X^3 \\ &= (6X^2+3X+1)(1-X)^3 + (6X^2 - 15X + 10)X^3. \end{aligned}$$

On pose alors $U_2 = 6X^2+3X+1$ et $V_2 = 6X^2-15X+10$ et, comme plus haut, on contrôle leur degré (2 en l'espèce) pour conclure qu'ils répondent à la question.
3 - Le polynôme U_1 n'a aucune racine réelle. Comme tous les polynômes constants, ce n'est pas un polynôme irréductible, qu'on le considère comme réel ou complexe. Le polynôme U_2 a pour unique racine réelle le réel $-1/2$. Comme tous les polynômes réels du premier degré, il est irréductible tant sur $\mathbf{R}$ que sur $\mathbf{C}$. Enfin U_3 est du deuxième degré et a un discriminant strictement négatif, donc pas de racine réelle. Il est donc irréductible sur $\mathbf{R}$; en revanche sur $\mathbf{C}$ son degré est trop gros et il n'est pas irréductible.
4 - Soit $n \geq 1$. Comme on l'a fait sur trois exemples, on regroupe en deux paquets les termes de l'identité $(*)$ qui devient :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-k-1} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-k-1} \\ &= X^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{n-k-1} + (1-X)^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{k-n} X^{2n-k-1} \end{aligned}$$

Il faut bien noter que les exposants introduits dans la dernière expression sont tous positifs : le calcul continue à fournir des polynômes. De plus chacun des polynômes figurant à l'intérieur des sommes est de degré exactement $n-1$.
Il ne reste donc plus qu'à poser :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{n-k-1} \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{k-n} X^{2n-k-1}$$

pour obtenir deux polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ avec lesquels l'identité (B_n) est vérifiée.
5 (a) En rapprochant l'identité (B_n) vérifiée par U_n et V_n et l'identité (B_n) vérifiée par A et B, on obtient :

$$A(1-X)^n + BX^n = U_n(1-X)^n + V_nX^n$$

qu'on regroupe en :

$$(V_n - B)X^n = (A - U_n)(1-X)^n.$$

Il n'y a plus qu'à appliquer le I à $P = V_n - B$, $Q = A - U_n$ et $m = n$.
(b) Les divisibilités prouvées au (a) montrent l'existence de polynômes Q et R tels que :

$$A - U_n = QX^n \qquad \text{et } V_n - B = R(1-X)^n$$

En reportant ces expressions dans la dernière identité écrite au (a) on lit :

$$R(1-X)^nX^n = QX^n(1-X)^n$$

de laquelle on déduit que $R = Q$.
(c) Soit (A, B) un couple vérifiant non seulement (B_n) mais aussi (d_n). Comme (A, B) vérifie (B_n) le (b) s'applique. Comme les degrés de U_n et de V_n sont strictement inférieurs à n, la conclusion du (b) peut être lue comme fournissant les divisions euclidiennes respectives de A par X^n et de B par $(1-X)^n$. Mais vu l'hypothèse (d_n) sur les degrés respectifs de A et de B, ces divisions euclidiennes sont aussi les expressions $A = 0X^n + A$ et $B = 0(1-X)^n + B$. Par unicité de la division euclidienne, $A = U_n$ et $B = V_n$.
6 (a) En substituant 0 à X dans (B_n), on obtient : $U_n(0) = 1$.
(b) En substituant 1 à X dans l'expression de U_n écrite au 4 on obtient :

$$U_n(1) = \binom{2n-1}{n}.$$

(c) Les polynômes $V_n(1-X)$ et $U_n(1-X)$ ont même degrés respectifs que V_n et U_n donc vérifient (d_n). En substituant $1-X$ à X dans (B_n) on s'aperçoit qu'ils vérifient aussi (B_n). Par le 5 (c) on en déduit que $U_n(1-X) = V_n$.
En susbtituant $\frac{1}{2}$ à X dans cette dernière expression, on conclut que $U_n(\frac{1}{2}) = V_n(\frac{1}{2})$.
Une fois qu'on sait ça, on substitue $\frac{1}{2}$ à X dans (B_n) et on conclut que $2U_n(\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ donc que $U_n(\frac{1}{2}) = 2^{n-1}$.
III 1 - U_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc U_n' est de degré inférieur ou égal à $n-2$ puis $(1-X)U_n'$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par ailleurs nU_n est lui aussi de degré inférieur ou égal à $n-1$. Leur différence est donc aussi de degré inférieur ou égal à $n-1$.
2 - On dérive (B_n) et on regroupe ce qu'on a obtenu sous la forme :

$$[nU_n - U_n'(1-X)](1-X)^{n-1} = [nV_n + XV_n']X^{n-1}$$

Après avoir remarqué que $0 < n-1$ puisque $2 \leq n$, on applique le I 1 (les exposants valant tous deux $n-1$) et cela donne le résultat suggéré.
3 - Vu l'information sur les degrés du 1, le polynôme quotient $(nU_n - (1-X)U_n')/X^{n-1}$ est de degré inférieur ou égal à 0. C'est donc une constante.
En substituant 1 à X dans l'identité $nU_n - (1-X)U_n' = \alpha X^{n-1}$, on obtient : $nU_n(1) = \alpha$. Il n'y a plus qu'à repêcher $U_n(1)$ du II 6 b pour conclure (2).
4 - On reporte la notation suggérée pour U_n dans (2). Ceci donne :

$$n\sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} ka_kX^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} ka_kX^k = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}.$$

Dans la première et la troisième somme on note l au lieu de k et dans la deuxième on note l au lieu de $k-1$. Ceci fournit :

$$\sum_{l=0}^{n-1} na_l X^l - \sum_{l=-1}^{n-2} (l+1)a_{l+1}X^l + \sum_{l=0}^{n-1} la_l X^l = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}.$$

(Il n'y a pas lieu de s'alarmer pour le terme étrange correspondant à $l=-1$: son coefficient est nul et on peut le faire disparaître !). Ceci se regroupe si on préfère en :

$$\sum_{l=0}^{n-2} \left[(n+l)a_l - (l+1)a_{l+1}\right] X^l + (2n-1)a_{n-1}X^{n-1} = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}.$$

En identifiant les coefficients des deux expressions du polynôme décrit par l'égalité qui précède on obtient, pour tout l variant entre 0 et $n-2$:

$$(n+l)a_l - (l+1)a_{l+1} = 0$$

ou, présenté autrement :

$$a_{l+1} = \frac{n+l}{l+1}a_l.$$

Une fois cette relation obtenue, on montre par récurrence sur l'entier l variant de 0 à $n-1$ l'énoncé :

$$(H_l) \qquad \text{“}a_l = \binom{l+n-1}{l}\text{”}.$$

* Pour vérifier (H_0), on s'aperçoit que $a_0 = U_n(0)$ et que celui-ci a été calculé au II 6 a : il vaut 1. Il est donc bien égal à $\binom{n-1}{0}$.
* On fixe ensuite un l avec $0 \leq l \leq n-2$ et on suppose (H_l) vraie. En invoquant la relation de récurrence qui précède, on obtient alors :

$$a_{l+1} = \frac{n+l}{l+1}a_l = \frac{n+l}{l+1}\binom{l+n-1}{l} = \frac{n+l}{l+1}\frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\,l!} = \frac{(n+l)!}{(n-1)!(l+1)!} = \binom{(l+1)+n-1}{l+1}$$

et l'hypothèse (H_{l+1}) est donc elle aussi vraie.
5 - On substitue 1 à X dans l'expression de U_n écrite dans l'énoncé de la question précédente, on repêche la valeur $U_n(1)$ de la question II 6 b et on repêche les valeurs des coefficients a_k de la question précédente. Et ça marche.