1) a) Après avoir reconnu une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre, puis posé l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ d'inconnue r dont les solutions sont ± 1, (E_0) est résolue par application directe du cours : ses solutions sont les

$$x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

où α et β parcourent $\mathbf{R}$.

b) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_0). Vu la description des solutions faite ci-dessus, on constate que $\mathcal{S}$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ formé des combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. C'est donc le sous-espace engendré par ces deux fonctions. En particulier c'est un sous-espace, et même un sous-espace de dimension inférieure ou égale à 2.

Les fonctions ch et sh sont solutions de (E_0) et ne sont visiblement pas proportionnelles l'une à l'autre. Elles forment donc une famille libre dans $\mathcal{S}$. Ceci prouve que $\mathcal{S}$ est de dimension supérieure ou égale à 2 donc de dimension 2. Maintenant qu'on sait que $(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ est libre et est formée d'un nombre de vecteurs de $\mathcal{S}$ égal à la dimension de $\mathcal{S}$, on en déduit que c'est une base de $\mathcal{S}$.

2) On constate que la fonction $-f$ est solution de (E), et encore une fois par application directe des résultats du cours explicitant les solutions des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, on en déduit que la solution générale de (E) est formée des :

$$x \mapsto -x + \alpha e^x + \beta e^{-x}, \qquad (\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}).$$

Dans l'esprit de la question précédente, on préfèrera peut-être -ça revient au même- répondre que les solutions de (E) sont les :

$$x \mapsto -x + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x, \qquad (\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}).$$

3) Là encore on recherche au brouillon une solution particulière de (E) et après calculs on constate que :

$$x \mapsto -(x^2 + x)e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

est une solution particulière de (E) dont la solution générale est donc :

$$x \mapsto -(x^2 + x)e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x, \qquad (\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}).$$

4) a) Il résulte des expressions de u et de v que $u(0) = v(0) = 0$, d'où on obtient $g(0) = 0$. Par ailleurs les fonctions sous le signe somme dans les définitions de u et de v sont continues comme produits de fonctions continues. On peut donc appliquer le rappel du chapeau de l'énoncé qui renvoie la dérivabilité de u et de v avec les expressions :

$$u' = f \ \mathrm{ch} \ \text{ et } v' = f \ \mathrm{sh}\,.$$

b) On dérive ensuite g comme différence de produits de fonctions dérivables et on a tout de suite :

$$g' = u' \operatorname{sh} + u \operatorname{ch} - v' \operatorname{ch} - v \operatorname{sh} = f \ \operatorname{ch} \operatorname{sh} + u \operatorname{ch} - f \ \operatorname{sh} \operatorname{ch} - v \operatorname{sh} = u \operatorname{ch} - v \operatorname{sh}\,.$$

En appliquant ceci en 0 on obtient $g'(0) = 0$.

c) g' est à son tour dérivable comme différence de produits de fonctions dérivables. Le calcul est tout aussi simple que pour g' mais il s'y passe autre chose :

$$g'' = u' \operatorname{ch} + u \operatorname{sh} - v' \operatorname{sh} - v \operatorname{ch} = f \ \operatorname{ch}^2 + u \operatorname{sh} - f \ \operatorname{sh}^2 - v \operatorname{ch} = g + f(\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2) = g + f$$

d'où on déduit que $g'' - g = f$.

5) Soit g_1 une autre solution de (E) qui vérifie les mêmes conditions en 0. Alors la fonction g_0 définie comme $g_0 = g - g_1$ est solution de (E_0) et vérifie aussi les conditions $g_0(0) = g_0'(0) = 0$. On a déterminé les solutions

de (E_0) au 1) : il existe donc λ et μ pour lesquels $g_0 = \lambda \operatorname{ch} + \mu \operatorname{sh}$. Pour que la condition $g_0(0) = 0$ soit réalisée, on doit avoir $\lambda = 0$ puis pour que la condition $g_0'(0) = 0$ le soit on doit avoir $\mu = 0$. D'où $g_0 = 0$ puis $g_1 = g$.

6) On va chercher g sous la forme

$$x \mapsto -x + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x, \qquad (\lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}).$$

suggérée au 2. Il reste à préciser les valeurs de λ et de μ. Pour ce faire, on explicite l'information $g(0) = 0$ d'où on tire $-0 + \lambda + 0\mu = 0$ donc $\lambda = 0$ puis l'information $g'(0) = 0$ d'où on tire $-1 + \mu = 0$ donc $\mu = 1$. On conclut donc que $g(x) = -x + \operatorname{sh} x$.

7) La fonction h est deux fois dérivable comme composée de fonctions deux fois dérivables, de plus pour tout x réel :

$$h'(x) = g'(x + T) \qquad \text{puis} \qquad h''(x) = g''(x + T).$$

On conclut alors que pour tout x réel :

$$h''(x) - h(x) = g''(x + T) - g(x + T) = f(x + T) = f(x)$$

et donc que h est solution de (E).
On constate ensuite que :

$$(h - g)'' - (h - g) = (h'' - h) - (g'' - g) = f - f = 0.$$

L'existence de λ et μ découle alors du 1 b).

8) Pour tout x réel, en appliquant à x l'identité finale de la question précédente on écrit :

$$h(x) - g(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$$

qu'on peut regrouper comme :

$$(*) \qquad g(x + T) = g(x) + \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x.$$

En appliquant cette identité $(*)$ à $x = 0$ on obtient :

$$g(T) = g(0) + \lambda.$$

On repêche alors $g(0) = 0$ du $4b$ et on conclut que $\lambda = g(0)$.
En dérivant $(*)$, puis en appliquant l'identité dérivée à $x = 0$ et en repêchant $g'(0) = 0$ du $4b$ on conclut de même que $\mu = g'(0)$.
Il n'y a plus qu'à reporter dans $(*)$ les valeurs trouvées pour λ et μ et conclure.

9) (Plus difficile que celles qui précédaient !)
Comme on l'a déjà remarqué ailleurs, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière g une solution de (E_0) : ce sont donc les fonctions $y_{\alpha,\beta}$ définies comme :

$$y_{\alpha,\beta} = g + \alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh}$$

(où α et β parcourent $\mathbf{R}$).
On va chercher lesquelles de ces fonctions $y_{\alpha,\beta}$ sont périodiques. Pour ce faire, on note (pour tous α, β, x réels), $z_{\alpha,\beta}(x) = y_{\alpha,\beta}(x + T)$ et on développe :

$$\begin{aligned} z_{\alpha,\beta}(x) = y_{\alpha,\beta}(x + T) &= g(x + T) + \alpha \operatorname{ch}(x + T) + \beta \operatorname{sh}(x + T) \\ &= g(x) + g(T) \operatorname{ch} x + g'(T) \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{ch} T \operatorname{ch} x + \alpha \operatorname{sh} T \operatorname{sh} x + \beta \operatorname{sh} T \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{ch} T \operatorname{sh} x \end{aligned}$$

donc :

$$z_{\alpha,\beta} = g + [g(T) + \alpha \operatorname{ch} T + \beta \operatorname{sh} T] \operatorname{ch} + [g'(T) + \alpha \operatorname{sh} T + \beta \operatorname{ch} T] \operatorname{sh}.$$

La fonction $y_{\alpha,\beta}$ est périodique de période T si et seulement si elle est égale à la fonction $z_{\alpha,\beta}$. Vu leurs expressions respectives, ceci se produit si et seulement si :

$$\alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} = [g(T) + \alpha \operatorname{ch} T + \beta \operatorname{sh} T] \operatorname{ch} + [g'(T) + \alpha \operatorname{sh} T + \beta \operatorname{ch} T] \operatorname{sh}.$$

La famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre : ces deux expressions sont donc égales si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha(\operatorname{ch} T - 1) & + & \beta \operatorname{sh} T & = & -g(T) \\ \alpha \operatorname{sh} T & + & \beta(\operatorname{ch} T - 1) & = & -g'(T) \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est $(\operatorname{ch} T - 1)^2 - \operatorname{sh}^2 T = \operatorname{ch}^2 T - \operatorname{sh}^2 T + 1 - 2 \operatorname{ch} T = 2(1 - \operatorname{ch} T)$. Il n'est pas nul puisque $T \neq 0$. Le système a donc une et une seule solution, ce qui prouve qu'une et une seule des fonctions $y_{\alpha,\beta}$ est T-périodique.

10) a) On reprend l'expression trouvée au 4 b et on la manipule :

$$\begin{aligned} g'(x) = u(x) \operatorname{ch} x - v(x) \operatorname{sh} x &= \int_0^x f(t) \operatorname{ch} x \operatorname{ch} t \, dt - \int_0^x f(t) \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t \, dt \\ &= \int_0^x [\operatorname{ch} x \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t] f(t) \, dt = \int_0^x \operatorname{ch}(x - t) f(t) \, dt. \end{aligned}$$

b) La fonction $h_x \colon t \mapsto \operatorname{ch}(x - t) f(t)$ est continue comme produit de fonctions continues. On peut donc lui appliquer le rappel du chapeau de l'énoncé : ceci garantit que H_x est dérivable, et a pour dérivée la fonction h_x. Or la fonction h_x est à valeurs strictement positives : la fonction H_x est donc strictement croissante.

c) Pour $0 < x$, le sens de variation de H_x permet de conclure que $0 < H_x(x) = g'(x)$. Au contraire pour $x < 0$ on conclura que $g'(x) = H_x(x) < 0$.

11) La fonction g s'annule en 0 et vu le signe de sa dérivée explicité à la question précédente, elle décroît strictement sur $\mathbf{R}^-$ et croît strictement sur $\mathbf{R}^+$: elle est donc à valeurs positives (et même strictement positives hors de 0). Comme g vérifie l'équation différentielle (E), $g'' = g + f$ dont on conclut que g'' est à valeurs strictement positives (même en 0).

12) a) On constate que k est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables, et que le signe de k' est celui du numérateur de son expression c'est-à-dire celui de :

$$g' \operatorname{ch} - g \operatorname{sh} = (u \operatorname{ch} - v \operatorname{sh}) \operatorname{ch} - (u \operatorname{sh} - v \operatorname{sh}) \operatorname{ch} = u(\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2) = u.$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et sa dérivée est $f \operatorname{ch}$, à valeurs strictement positives. Elle est donc strictement croissante ; compte tenu de $u(0) = 0$, elle prend des valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}^{+*}$. Il en est donc de même de k'.

b) La fonction k est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. En particulier pour tout $x \geq 1$, $k(x) > k(1)$. Notons A la valeur $k(1)$, qui est strictement positive puisque $k(0) = g(0)/1 = 0$ et k est strictement croissante.

On en déduit que pour tout $x > 1$, $A \operatorname{ch} x \leq g(x)$. Soit $\alpha < 1$. Alors pour tout $x \geq 1$, $g(x)/e^{\alpha x} = k(x) \operatorname{ch} x e^{-\alpha x} > (A/2) e^{(1-\alpha)x}$ et tend donc vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En passant à l'inverse, on obtient l'affirmation à prouver.