1) a) On peut calculer facilement $1/\varphi$ puis chasser les racines du dénominateur. Il est plus rigolo de partir de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue réelle x, de la résoudre avec le discriminant et s'apercevoir que φ est solution donc que $\varphi^2 = \varphi + 1$. En divisant ça par φ on a gagné.

b) $\mathrm{ch}(\ln\varphi) = \dfrac{1}{2}(\varphi + \dfrac{1}{\varphi}) = \dfrac{1}{2}(2\varphi - 1) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Un calcul de la même eau donne $\mathrm{sh}(\ln\varphi) = \dfrac{1}{2}$.

2) Restreindre l'ensemble de départ, ça on sait toujours faire. En revanche on ne peut restreindre l'ensemble d'arrivée qu'après avoir vérifié avec soin que si $1 \leq x$ alors $1 \leq h(x)$. Ceci est facile : en fait dès que $0 < x$, on peut écrire $0 < 1/x$ et conclure que $1 < h(x)$.
Vu la décroissance stricte de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$, f est à son tour strictement décroissante sur son ensemble de définition. On peut préférer dériver, et ça marche tout aussi bien !

3) $u_1 = f(u_0) = 2$ puis $u_2 = f(u_1) = 3/2$.
On écrit ensuite une expression générale de la dérivée, valable sur $[1, +\infty[$ tout entier : pour tout x de cet intervalle, $f'(x) = -1/x^2$. Si on prend x plus grand que $3/2$ on peut alors minorer x^2 par $9/4$ et en inversant ça ça donne le résultat demandé.

4) Ceci est fort banal : on montre par récurrence sur n entier positif ou nul l'hypothèse (H_n) : "$u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$".
* Pour $n = 0$ la partie comparant u_0 et u_2 se lit sur leurs valeurs trouvées plus haut, la partie comparant u_1 et u_3 s'obtient en appliquant la fonction décroissante f à l'inégalité $u_0 \leq u_2$.
* Soit un n fixé ; on suppose (H_n) vraie. Alors par une application de la fonction décroissante f à la deuxième partie de (H_n) on obtient la première partie de (H_{n+1}) et en recommençant sur celle-ci on obtient la deuxième partie de (H_{n+1}).
On en conclut que (H_n) est vraie pour tout n entier. Ceci exprime exactement les monotonies demandées.

5) Une idée qui marche bien est d'en faire volontairement un peu plus que demandé et de montrer par récurrence sur n entier supérieur ou égal à 1 l'hypothèse (H_n) : $u_2 \leq u_n \leq u_1$.
* L'initialisation est sans problème.
* Pour l'incrémentation on applique à (H_n) la fonction décroissante f et on obtient : $u_2 \leq u_{n+1} \leq u_3$. Comme on sait déjà que $u_3 \leq u_1$ ça marche.
L'hypothèse (H_n) est donc vraie pour tout n. Il n'y a plus qu'à oublier la moitié de cette conclusion et c'est gagné.

6) a) Dans un premier temps on fixe $n \geq 1$ et on remarque que le segment d'extrémités u_n et u_{n+1} est, par la question précédente, inclus dans la demi-droite $[u_2, +\infty[$. La majoration du 3) est donc opérationnelle sur ce segment. En appliquant le théorème des accroissements finis sur ce segment on obtient le résultat demandé.

b) Simple récurrence sur $n \geq 1$ dans laquelle l'initialisation est totalement triviale et l'incrémentation utilise le a).

7) L'inégalité précédente a pour conséquence que $u_{2n+1} - u_{2n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ceci et le 4) autorise d'utiliser le critère des suites adjacentes : les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, vers une même limite. La suite (u_n) en fait donc autant.
La fonction f est continue ; on en déduit que si l est la limite, elle vérifie $f(l) = l$. Oh surprise, le seul point fixe de f est le nombre d'or. La limite est donc le nombre d'or.

8) S'il n'y avait pas les petits points en diagonale, la fraction emboîtée qu'on a écrite désignerait $f(f(f(1)))$ c'est-à-dire u_3. Si on n'avait eu que ça à faire, on en aurait écrit bien plus genre $f(f(f(f(f(f(1))))))$ c'est-à-dire u_6 ou pourquoi pas écrire $u_{10^{10}}$ si on est vraiment patient et qu'on a beaucoup de papier. Les points de suspension évoquent la répétition indéfinie de l'opération ; ils sont une façon de raconter qu'on passe à la limite. La notation bizarre de droite semble raisonnablement désigner la limite des u_n. La question précédente a montré que c'est bien φ.

9) Soit u et v des réels. On dispose des développements :

$$\mathrm{ch}(2u) = \mathrm{ch}[(u+v) + (u-v)] = \mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v) + \mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)$$

$$\mathrm{ch}(2v) = \mathrm{ch}[(u+v) - (u-v)] = \mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v) - \mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)$$

En les soustrayant l'un à l'autre on obtient :

$$2\,\mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v) = \mathrm{ch}(2u) - \mathrm{ch}(2v).$$

Or $\mathrm{ch}(2u) = 2\,\mathrm{ch}^2 u - 1$ et $\mathrm{ch}(2v) = 2\,\mathrm{ch}^2 v - 1$. En substituant ces deux expressions dans l'identité qui précède, on obtient (a).
De la même façon on dispose des développements :

$$\mathrm{sh}(u+2v) = \mathrm{sh}[(u+v)+v] = \mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}(u+v) + \mathrm{sh}\,v\,\mathrm{ch}(u+v)$$
$$\mathrm{sh}(u) = \mathrm{sh}[(u+v)-v] = \mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}(u+v) - \mathrm{sh}\,v\,\mathrm{ch}(u+v)$$

En soustrayant, on obtient (b).
10) Soit a et n deux réels. Pour la première identité, on applique (c) à $u = na$ et $v = a$. On obtient :

$$\mathrm{ch}(na+a)\,\mathrm{ch}(na-a) = \mathrm{sh}^2(na) + \mathrm{ch}^2(a)$$

En divisant ceci par $\mathrm{ch}^2(a)$ on obtient l'identité (e).
De même on obtient (f) en appliquant (a) à $u = na$ et $v = a$ puis en divisant par $\mathrm{ch}^2 a$.
11) a) Les valeurs $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ tombent très facilement.
b) $F_2 = \mathrm{sh}(2\ln\varphi)/\,\mathrm{ch}(\ln\varphi) = 2\,\mathrm{sh}(\ln\varphi) = 1$ vu le 1 b).
12) Si n est pair, on applique l'identité (e) du 9) à n et à $a = \ln\varphi$ et hop ça roule. Si n est impair, on fait ça avec l'identité (f).
13) Si n est pair, on applique l'identité (b) du 9) à $u = n\ln\varphi$ et à $v = \ln\varphi$, puis on divise le tout par $\mathrm{ch}(\ln\varphi)$. Ceci donne :

$$F_{n+2} = 2\,\mathrm{sh}(\ln\varphi)F_{n+1} + F_n.$$

On récupère la valeur de $\mathrm{sh}(\ln\varphi)$ de la question 1 b). Et hop encore. Si n est impair, on fait la même chose avec (d).
14) On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$ l'hypothèse :

$$(H_n) \qquad \text{“}F_n \in \mathbf{N}^*\text{”}$$

est réalisée.
* La vérification est comme faite pour $n = 1$ et $n = 2$.
* Soit un n fixé, avec $n \geq 1$. Supposons (H_k) vraie pour tous les entiers k compris au sens large entre 1 et $n+1$ -donc en particulier pour n et $n+1$. Alors F_{n+2} est un entier strictement positif comme somme des entiers strictement positifs F_{n+1} et F_n : (H_{n+2}) est donc vérifiée.
On déduit de cette initialisation et de cette incrémentation que (H_n) est réalisée pour tout $n \geq 1$. La valeur $F_0 = 0$ déjà connue complète la réponse.
15) Soit $n \geq 1$ un entier. On relit l'identité de Cassini en notant dans celle-ci s à la place de F_{n-1} et t à la place de l'une des manifestations de F_n -ce sont des entiers vu la question précédente. On lit alors :

$$|sF_{n+1} - tF_n| = 1.$$

Oh ! Une identité façon Bézout ! Elle assure que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
16) Pour cette question, le plus sympathique est de réécrire la définition si lourdaude de F_n en une formule unique, valable pour tout n quelle que soit sa parité :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$

Puis de remarquer que le $-(1/\varphi)^n$ est négligeable devant son compère, qui l'emporte donc au *finish* pour déterminer l'ordre de grandeur de la suite.

17) Simple récurrence sur n en utilisant la question 11 pour l'initialisation et la 13 pour l'incrémentation.

18) On reporte l'équivalent de la question 16 et on découvre que $u_n \sim \varphi$ quand n tend vers l'infini. Cette suite tend donc vers φ.

19) a) Puisque (u_{2n}) converge vers φ en croissant tandis que (u_{2n+1}) le fait en décroissant, deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont situés de part et d'autre de la limite φ. La distance de chacun des deux à φ est donc plus faible que la distance qui les sépare.

b) On applique le a) à $n = k-1$, on utilise le 17) pour écrire u_{k-1} et u_k en fonction de F_k, F_{k-1} et F_{k-2}. Cela donne :

$$\left|\frac{F_{k+1}}{F_k} - \varphi\right| \leq \left|\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right|.$$

On regarde de plus près :

$$\left|\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right| = \left|\frac{F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2}{F_{k+1}F_k}\right| = \frac{1}{F_{k+1}F_k}$$

(où la dernière égalité provient de l'identité de Cassini, question 12).
Enfin on minore $F_k \leq F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$ ce qui permet de majorer :

$$\frac{1}{F_{k+1}F_k} \leq \frac{1}{F_k^2}.$$

20) Oui mais ce n'est pas une question très facile, surtout sans entraînement pour la manipulation des équivalents et autres petits o. Comme à la question 16 on utilisera avec profit une expression explicite des F_k puis on calculera à partir de celle-ci un équivalent explicite de :

$$\left|\frac{F_{k+1}}{F_k} - \varphi\right|$$

et là on est presque arrivé. Je ne le fais pas pour laisser du travail aux lecteurs de ce corrigé, et en profite pour rappeler au lecteur arrivé jusque là qu'un corrigé lui est aussi utile pour progresser en mathématiques qu'une retransmission télévisée pour progresser au tennis - j'exagère peut-être un peu mais à peine. Rangez donc ce corrigé et essayez plutôt de refaire un morceau du problème sans y avoir accès : même si ça ne devrait pas non plus vous faire faire des progrès fulgurants au tennis, ça ne pourra pas vous faire de mal.