Exercice 1

Puisque Argch a été défini comme réciproque de la restriction de ch de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, Argch $\circ$ ch coïncide avec l'identité sur $[0,+\infty[$. Ceci signifie que pour x réel positif :

$$\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}\, x) = x$$

qui est bien la formule à prouver puisque par ailleurs $|x| = x$. Par ailleurs les deux fonctions $x \mapsto \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}\, x)$ et $x \mapsto |x|$ sont paires sur $\mathbf{R}$, donc la formule est également vraie pour x réel négatif.

Exercice 2

1) On discute en sept sous-cas selon le reste de la division euclidienne de n par 7, en exploitant la remarque simple mais essentielle selon laquelle, pour tous n et r entiers, si $n \equiv r\,[7]$ alors $n^3 \equiv r^3\,[7]$. Après avoir constaté que $2^3 \equiv 1$, que $3^3 \equiv 6$, que $4^3 \equiv (-3)^3 \equiv 1$, que $5^3 \equiv (-2)^3 \equiv -1 \equiv 6$ et que $6^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \equiv 6$, on constate que n^3 est nécessairement congruent à 0, 1 ou 6, les trois éventualités se produisant.
Le représentant de la classe de congruence qui appartient à l'ensemble $\{0,\ldots,6\}$ est aussi le reste de la division euclidienne par 7 : les restes possibles sont donc aussi 0, 1 et 6.

2) Puisque 7 ne divise pas x et est premier, il ne divise pas non plus x^3 qui n'est donc pas congru à 0 modulo 7. Au vu de l'énumération du 1) x^3 est donc congru à 1 ou à -1 modulo 7. Il en est de même de y^3 donc $x^3 + y^3$ est congru à -2, à 0 ou à 2 modulo 7. Par ailleurs z^3 est, lui, congru à 1 ou -1. La somme $(x^3 + y^3) + z^3$ n'est donc pas congrue à 0 et n'est donc pas divisible par 7.

Exercice 3

1) a) Pour tout θ réel, $-1 \leq \cos\theta$ d'où on déduit que le radicande est positif dans l'expression qui définit $g(\theta)$. La racine carrée a donc bien un sens, et $g(\theta)$ est défini.

b) On peut aller un peu plus loin : de l'encadrement $\cos\theta \leq 1$ découle une majoration du radicande par $\dfrac{1}{2}(1+1)$ donc par 1. La racine est à son tour majorée par 1 dont on déduit que g est à valeurs dans $[0,1]$. Or cet intervalle est à son tour inclus dans l'ensemble $[-1,1]$ de définition de l'Arc sinus. L'expression $f(\theta)$ est donc bien définie.
La continuité découle comme d'habitude de la continuité de toutes les fonctions usuelles intervenant dans la formule (fonctions constantes, cosinus, racine et arcsinus en l'espèce) et de la stabilité par addition, multiplication, composition de l'ensemble des fonctions continues.

2) Sur l'intervalle qui est ici proposé, l'inégalité du 1) a) s'améliore en $-1 < \cos\theta$ et le radicande est dès lors strictement positif. La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0,+\infty[$ on conclut à la dérivabilité de g comme composée de fonctions dérivables. Pour θ dans l'intervalle suggéré on calcule sans souci :

$$g'(\theta) = -\frac{\sin\theta}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}$$

3) La nouvelle restriction du domaine de définition garantit désormais l'encadrement $-1 < \cos\theta < 1$, strict des deux côtés, puis l'encadrement du radicande entre 0 et 1 au sens strict, puis l'encadrement de $g(\theta)$ encore entre 0 et 1 au sens strict. La fonction Arcsinus étant dérivable sur $]-1,1[$ le théorème de dérivation des fonctions composées peut s'appliquer.
On a alors, pour tout θ de $]0,\pi[$:

$$f'(\theta) = \frac{g'(\theta)}{\sqrt{1-g^2(\theta)}}.$$

On calcule préalablement :

$$\sqrt{1-g^2(\theta)} = \sqrt{1-\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

qu'on reporte en même temps que le résultat du 2) dans l'expression de $f'(\theta)$ pour obtenir :

$$f'(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1-\cos\theta}} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|} = -\frac{1}{2}$$

(la dernière égalité a utilisé la positivité de $\sin\theta$, manifeste dans l'intervalle d'étude).

4) La fonction $x \mapsto f(\theta) + \theta/2$ est dérivable et de dérivée nulle sur $]0, \pi[$, qui est un intervalle. Elle est donc constante. Cette fonction est par ailleurs continue sur $[0, \pi]$ donc reste constante sur cet intervalle fermé. Enfin en π elle vaut $\mathrm{Arcsin}(g(\pi)) + \pi/2 = \mathrm{Arcsin}(0) + \pi/2 = \pi/2$. Il s'agit donc de la constante $\pi/2$. D'où la conclusion : pour tout x dans $[0, \pi]$,

$$f(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Exercice 4

1) Soit (x, y) un élément de E_0. Puisque $5x$ est égal à $11y$, l'entier 11 divise $5x$ tout en étant premier avec 5 : il divise donc x. On peut donc écrire $x = 11k$ pour un $k \in \mathbf{Z}$. On obtient alors $11y = 55k$ donc $y = 5k$ et on conclut que $(x, y) = (11k, 5k)$. Réciproquement, on vérifie de tête que tous les $(11k, 5k)$ sont dans E_0.

2) On constate toujours de tête que $(9, 4)$ répond à la question.

3) L'équation qui définit E peut être réécrite :

$$5x - 11y = 5s - 11t$$

puis regroupée comme :

$$5(x - s) - 11(y - t)$$

en d'autres termes comme signifiant :

$$(x - 9, y - 4) \in E_0.$$

Au vu du résultat du 1) on conclut que $E = \{(9 + 11k, 4 + 5k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Exercice 5

1) On vérifie une double inclusion :
* si on prend un φ dans l'ensemble de gauche, il est égal à $\mathrm{Arcsin}(\sin\varphi)$ et est donc une valeur prise par Arcsin. Or l'ensemble des valeurs prises par Arcsin est précisément l'intervalle de droite ;
* on sait que Arcsin est la réciproque de la restriction de sin restreint comme fonction de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$. En particulier la fonction $\mathrm{Arcsin} \circ \sin$ coïncide avec l'identité sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Si on prend φ dans l'intervalle de droite, il vérifie donc l'équation qui délimite l'ensemble de gauche.

2) Soit un tel x. Alors :

$$1 - \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 - 4x^2(1 - x^2) = 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

3) Pour être dans le domaine de définition de f il faut à tout le moins être dans celui de l'Arcsinus. Il est donc clair que le domaine de définition de f est inclus dans $[-1, 1]$.
Réciproquement, si on prend un x dans cet intervalle, d'après la question précédente l'expression $x\sqrt{1-x^2}$ est elle aussi dans cet intervalle. Les deux Arcsinus qui figurent dans la définition de f sont donc bien définis : on est bien dans l'ensemble de définition de f.
La réponse est donc $[-1, 1]$.

4) Soit $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\begin{aligned}
(E') &\iff 2\operatorname{Arcsin}(\sin(\theta)) = \operatorname{Arcsin}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}) \\
&\iff 2\theta = \operatorname{Arcsin}(2\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}) \text{ (en appliquant le 1) à } \varphi = \theta)) \\
&\iff 2\theta = \operatorname{Arcsin}(2\sin\theta\cos\theta) \text{ (on se dispense de valeur absolue sur le cos vu l'intervalle ou varie } \theta) \\
&\iff 2\theta = \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta)) \\
&\iff 2\theta \text{ est dans l'ensemble du 1)} \\
&\iff -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \\
&\iff -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5) Soit x un réel. S'il n'appartient pas à l'ensemble $[-1,1]$ l'expression $\operatorname{Arcsin} x$ n'a pas plus de sens que le mot dfqdfqsfdsqf et (E) n'est donc pas vérifiée. S'il est dans l'ensemble $[-1,1]$ on peut poser $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ donc $x = \sin\theta$ et, après ce tour de passe-passe, (E) est devenue (E').
On conclut donc que pour tout x réel,

$$(E) \iff \operatorname{Arcsin} x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \iff x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}].$$