Exercice 1

1) $u_1 = 0,1$, $u_2 = 0,11$, $u_3 = 0,110001$.

2) Pour chaque $n \geq 1$, on constate que $u_{n+1} - u_n = 1/10^{(n+1)!} > 0$. La suite est donc strictement croissante.

3) a) On peut préalablement réécrire :

$$u_n = \sum_{\substack{l=1 \\ \exists k \mid l=k!}}^{n!} \frac{1}{10^l}$$

puis, de façon évidente :

$$\sum_{\substack{l=1 \\ \exists k \mid l=k!}}^{n!} \frac{1}{10^l} \leq \sum_{l=1}^{n!} \frac{1}{10^l}.$$

b) Par sommation de termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{l=1}^{n!} \frac{1}{10^l} = \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^{n!}}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

c) Toute suite de réels croissante et majorée converge.

4) a) L'inégalité de gauche découle de la croissance stricte de la suite ; celle de droite se traite comme le 3 a) :

$$u_m - u_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{\substack{l=(n+1)! \\ \exists k \mid l=k!}}^{m!} \frac{1}{10^l} \leq \sum_{l=(n+1)!}^{m!} \frac{1}{10^l}.$$

La déduction est alors une manipulation de suite géométrique analogue à celle faite au 3b) :

$$\sum_{l=(n+1)!}^{m!} \frac{1}{10^l} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{s=0}^{m!-(n+1)!} \frac{1}{10^s} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \frac{1 - \frac{1}{10^{m!-(n+1)!+1}}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}}.$$

b) Pour l'inégalité de droite, il suffit de faire tendre m vers l'infini dans l'inégalité de droite du a). Pour celle de gauche, il faut être un peu plus prudent. On pourra commencer par écrire que $0 < u_{n+1} - u_n \leq u_m - u_n$. Si on a pris cette précaution, faire tendre m vers l'infini est désormais efficace.

5) a) On peut très explicitement écrire :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{n!-k!}$$

et sous cette forme, il est clair que p_n est un entier positif.

b) On substitue $p_n/10^{n!}$ dans l'expression de P puis on chasse les dénominateurs en multipliant par $10^{n! \times d}$. Si on tient à convaincre le correcteur on peut écrire explicitement ce qu'on obtient, encore que ça me semble à la limite du superflu, faisons quand même :

$$10^{n! \times d} P(u_n) = m_d p_n^d + 10^{n!} m_{d-1} p_n^{d-1} + \cdots + 10^{n!(d-1)} m_1 p_n + 10^{n! \times d} m_0.$$

Sous cette forme, construite en somme de produits d'entiers, il est clair que c'est un entier.

6) a) Le polynôme P n'étant pas nul, l'ensemble A de ses racines est fini ; *a fortiori* l'ensemble B de ses racines distinctes de λ est fini. On peut donc poser :

$$\epsilon = \underset{\alpha \in B}{\mathrm{Min}} \left(\frac{|\alpha - \lambda|}{2} \right)$$

qui est strictement positif puisque plus petit élément d'un ensemble (fini) de réels strictement positifs. Cet ϵ répond à la question : il est par construction strictement plus petit que tous les $|\alpha - \lambda|$ où α est une racine de P distincte de λ.

b) Vu la définition de λ, u_n tend vers λ quand n tend vers l'infini, donc il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \lambda|$ soit inférieur ou égal à ϵ. De plus au vu de la minoration du 4b), u_n n'est jamais égal à λ. Ces deux informations rapprochées du a) ci-dessus assurent que u_n ne peut être une racine de P.

7) a) Le quotient existe parce que $0 < \lambda - u_n$ ce qui garantit la non-nullité du dénominateur, et c'est un taux d'accroissement de la fonction polynomiale associée à P, qui est dérivable de façon évidente. Comme $u_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$, par composition des limites ce taux tend vers $P'(\lambda)$.

b) Par définition de la convergence, il existe un entier N_1 tel que pour $n \geq N_1$, la valeur absolue du taux d'accroissement écrit au a) soit majorée au sens large par $|P'(\lambda)| + 1$. Si on prend pour M le plus grand élément de l'ensemble ayant pour éléments $|P'(\lambda)| + 1$ et les $N_1 - 1$ premières valeurs de la valeur absolue de ce taux d'accroissement, il majore la valeur absolue du taux d'accroissement pour tout n. Il n'y a plus qu'à multiplier par $\lambda - u_n$ dont le signe nous est connu.

c) On raboute le b) ci-dessus et la majoration du 4b) et on obtient :

$$10^{n! \times d} |P(u_n) - P(\lambda)| \leq \frac{10M}{9} 10^{n!(d-n-1)}.$$

Dans cette dernière majoration l'exposant de 10 tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (comme produit de $n!$ qui tend vers $+\infty$ et de $d - n - 1$ qui tend vers $-\infty$). Le majorant tend donc vers 0 et avec lui, gendarmes obligent, la suite de réels dont il majore la valeur absolue.

8) On fait ça par l'absurde. Soit P un hypothétique tel polynôme et soit d son degré. On considère la suite de terme général $10^{n! \times d} u_n$. Vu la question 5 c'est une suite d'entiers. Vu la question 6 c'est même une suite d'entiers non nuls (sauf peut-être un nombre fini de fois au début, mais ça compte pas). Enfin vu la question 7 dans laquelle le $P(\lambda)$ disparaît, elle tend vers zéro. Je suis tenté de m'écrier "y'a un blème". Sur le site web des correcteurs du Monde, un commentateur acerbe assure que raccourcir ainsi les mots c'est être "fainéant", mais un autre juge que " le langage évolue, l'aphérèse fait partie de cette évolution". Allez je m'y risque et hop l'absurdité de la situation est constatée. Le polynôme P n'existe donc pas.

Exercice 2

1) VRAI C'est dans le cours point par point, il faut juste en déduire que la conclusion est vraie partout si l'hypothèse est réalisée partout, c'est pas la mort. Si on est prudent, on rappellera la démonstration, ne sachant trop si le correcteur l'exige ou non. (En pratique je ne l'exige pas, mais dans le doute il vaut mieux ne pas s'abstenir, sauf si on ne sait pas la reconstituer - dans lequel cas on retravaille ça à lecture de ce corrigé, bien sûr).

2) VRAI Ça sentait la question piège et ça en était une. Les deux sont équivalents à x, le premier parce que c'est bien connu (ou parce que $\sin x = x + o(x)$ si on veut être disert), le second par vérification immédiate. Donc ils sont équivalents l'un à l'autre.

3) FAUX Pas forcément s'ils sont de même degré : par exemple pour $P = -2X^2 + X$ et $Q = X^2 + 1$ ou plein d'autres exemples similaires.

4) FAUX Il est clair que α est toujours racine de $P - Q$, mais il peut se retrouver racine double voire davantage. Par exemple si $P = X(X-1)$ et $Q = -(X-2)(X-1)$, $P - Q = 2(X-1)^2$. Dans cet exemple, 1 est racine simple de P et Q, mais racine double de $P - Q$.