Exercice 1

1) Vrai : prendre une base de E, une base de F et définir u dans ces bases en posant $f(e_k) = f_k$ pour tout k.

2) Vrai, facile, essentiellement fait en TD.

3) Faux, cf. $f = \mathrm{Id}$, $g = -\mathrm{Id}$ dans n'importe quel espace de dimension strictement positive.

4) Vrai, cf. u défini par $u(x, y) = (y, 0)$.

Exercice 2

1) Pour chaque θ fixé avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$, on dispose de l'encadrement :

$$0 \leq \sin\theta \leq 1.$$

Soit $n \geq 0$. En multipliant cet encadrement par le réel positif $\sin^n\theta$, on obtient :

$$0 \leq \sin^{n+1}\theta \leq \sin^n\theta.$$

En intégrant cette inégalité entre les réels 0 et $\pi/2$, on obtient l'encadrement : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Il en découle que (I_n) est une suite décroissante.

Par ailleurs pour chaque n fixé, I_n est l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle sur un intervalle non réduit à un point : elle est donc strictement positive.

2) On effectue une intégration par parties en utilisant les fonctions $u(\theta) = \sin^{n+1}\theta$ et $v(\theta) = -\cos\theta$. Celle-ci fournit la relation :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta\, d\theta = \left[\sin^{n+1}\theta\cos\theta\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\cos^2\theta\, d\theta.$$

On remplace $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$ dans cette identité tout en remarquant que le terme sans intégrale y est nul, on obtient :

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

Depuis cette identité le résultat demandé est à peu près immédiat.

3) On fixe dans un premier temps $n \geq 0$ et on écrit, en utilisant la décroissance de la suite des intégrales :

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

On divise alors cet encadrement par le réel strictement positif I_n et on obtient :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

On cesse alors de fixer n et on le fait tendre vers l'infini. Par la propriété dite "des gendarmes" on obtient alors le résultat souhaité.

4) Simple récurrence pas rigolote : pour $k = 0$ le calcul de $I_1 = 1$ est instantané puis l'incrémentation se fait à l'aide du 2).

5) Simple récurrence pas plus drôle que la précédente : pour $k = 0$ le calcul de $I_0 = \pi/2$ est instantané puis l'incrémentation se fait aussi à l'aide du 2).

6) On fixe un $k \geq 0$ puis on divise le résultat du 4) par le résultat du 5). Ceci fournit :

$$\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \frac{2 \cdot 4^{2k}(k!)^4}{(2k)!(2k+1)!\pi}$$

qu'on regroupe en :

$$\frac{((2k)!)^2}{(k!)^4} = \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}\frac{4^{2k} \cdot 2}{(2k+1)\pi}$$

et on prend la racine carrée des deux côtés.

7) Ça redevient très facile : dans l'expression qui précède, le quotient d'intégrales tend vers 1 donc sa racine est équivalente à 1 et le $\sqrt{2k+1}$ est équivalent à $\sqrt{2}\sqrt{k}$.

8) Question sans difficulté. Je n'écris pas les détails.

9) On écrit que a_n est le logarithme népérien de l'expression de la question 8) ; cela permet le développement :

$$\begin{aligned} a_n = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

10) D'après le calcul qui précède, $n^2 a_n$ tend vers $-1/12$ quand n tend vers l'infini. En appliquant la définition de "tendre vers" à $\epsilon = 1/6$, on en déduit qu'il existe un $N \geq 2$ tel que pour tout $n \geq N$, $-1/6 \leq n^2 a_n^{\leq} 0$, qu'il n'y a plus qu'à diviser par n^2 pour retrouver la formule proposée.

11) Simple calcul : $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)} \geq \dfrac{1}{n^2}$.

12) On commence par considérer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{n-1} a_k &= a_{n-1} + \cdots + a_{N+1} + a_N \\ &= \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) + \ln(u_{n-1}) - \ln(u_{n-2}) + \cdots + \ln(u_{N+2}) - \ln(u_{N+1}) + \ln(u_{N+1}) - \ln(u_N) \\ &= \ln(u_n) - \ln(u_N). \end{aligned}$$

En encadrant chaque a_k par l'inégalité :

$$-\frac{1}{6(k-1)} + \frac{1}{6k} \leq a_k \leq 0$$

obtenue en mettant bout à bout les questions 3 et 4, et en sommant toutes ces inégalités entre N et n, on obtient, avec à gauche le même phénomène de télescopage que dans le calcul qui a ouvert la question :

$$-\frac{1}{6(N-1)} \leq -\frac{1}{6(N-1)} + \frac{1}{6(n-1)} \leq \sum_{k=N}^{n-1} a_k \leq 0.$$

En remplaçant la somme des a_k par l'expression fournie en ouverture de la question et en se concentrant sur l'inégalité de gauche, on obtient alors :

$$\ln(u_N) - \frac{1}{6(N-1)} \leq \ln(u_n).$$

On a prouvé que la suite $\ln(u_n)$ (pour des $n \geq N$) est minorée.
Pour la décroissance, elle est simplement due au fait que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = a_n$ est négatif dès lors que n est plus grand que N.
Décroissante et minorée, cette suite converge donc dans $\mathbf{R}$.

13) Puisque (u_n) en est la suite des exponentielles, elle converge aussi, vers une constante qu'on notera C, qui est strictement positive puisque c'est l'exponentielle de la limite les $\ln(u_n)$.

14) On doit trouver $C = \sqrt{2\pi}$. Si vous avez lu le corrigé jusqu'ici, vous en êtes probablement capables (on se sert des seuls résultats des questions 7 et 13).