Feuille d'exercices n° 3

DIAGONALISATION

1 Valeurs propres. Vecteurs propres

Exercice 1. Pour les espaces vectoriels V_i et les applications linéaires $T_i \in \mathcal{L}(V_i)$ suivantes trouver toutes les valeurs propres λ et les espaces propres correspondants $V_i(\lambda)$:

1. $V_1 = \mathbb{R}^n$ et $T_1 = \mathbb{O}$, $\mathbb{O}v = 0$ pour $\forall v \in V$,
2. $V_2 = \mathbb{R}^n$ et $T_2 = \mathrm{Id}_n, \forall v \in V_2$,
3. $V_3 = \mathbb{R}^2$ et T_3 est définie par $T_3(z,w) = (z,0),\ \forall (z,w) \in \mathbb{R}^2$,
4. $V_4 = \mathbb{R}^2$ et T_4 est définie par $T_4(z,w) = (-z,w),\ \forall (z,w) \in \mathbb{R}^2$,
5. $V_5 = \mathbb{C}^2$ et T_5 est définie par $T_5(z,w) = (-z,w),\ \forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$,
6. $V_6 = \mathbb{C}^2$ et T_6 est définie par $T_6(z,w) = (5w+z,5z),\ \forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$,
7. $V_7 = \mathbb{C}^n$ et T_7 est définie par $T_7(z_1,\cdots,z_n) = (z_1+\cdots+z_n,\cdots,z_1+\cdots+z_n),\ \forall (z_1,\cdots,z_n) \in \mathbb{C}^n$,
8. $V_8 = \mathbb{R}^n$ et T_8 est un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire il existe un entier k tel que $T_8^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$).

Exercice 2. On va considérer deux espaces vectoriels de dimension infinie dans cet exercice. La définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre est dans ce cas la même que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension fini.

1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions différentiables un nombre infini de fois et 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $L \in End(V)$ défini par $L(f) = f''$. Montrer que les fonctions f_k, définies par $f_k(x) = \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}$, sont des vecteurs propres de L. Calculer les valeurs propres associées $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et l'application linéaire $T\ : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $T(a_1,a_2,a_3,\cdots) = (a_2,a_3,a_4,\cdots)$. Trouver toutes les valeurs propres de T et, pour chaque valeur propre λ, une base de V_λ.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire associée.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de ϕ_A si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id_n}) = 0$.
2. Soit $p_A \in \mathbb{K}_n[X]$ défini par $p_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{Id_n})$. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A, $Spec(\phi_A) = \{\lambda \in \mathbb{K} |\ p_A(\lambda) = 0\}$, et en déduire que ϕ_A possède au plus n valeurs propres distinctes.
3. Soient ϕ_A et $\phi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de ϕ_A et ϕ_B.

2 Polynôme caractéristique

Exercice 4.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer la formule suivante pour le polynôme caractéristique
$$p_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \mathrm{Det}(A)$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La formule pour le polynôme caractéristique est la suivante
$$p_A(X) = X^3 - \mathrm{Tr}(A)X^2 + Z(A)X - \mathrm{Det}(A) \quad \text{où} \quad Z(A) = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}(A^2)).$$
La démontrer pour le cas ou la matrice A est diagonale.

Exercice 5.

1. Donner un exemple d'une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ n'ayant aucune valeur propre. Cela est-il possible pour une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?
2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension fini et $\phi \in \mathcal{L}(V)$ n'ayant aucune valeur propre. Que peut-on dire sur la dimension de V ? Montrer que si $\phi \in \mathcal{L}(V)$ n'a aucune valeur propre et U est un sous-espace ϕ-invariant de V, alors la dimension de U est paire.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que
$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors son conjugue $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, de même multiplicité.
2. Montrer que si v est un valeur propre associé à λ, alors son conjugué $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Exercice 8. On considère la matrice complexe
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de A ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de A ?
3. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
4. Montrer que si son déterminant est nul, A n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que A est diagonalisable sauf si elle de rang un.
6. En supposant que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

3 Diagonalisation

Exercice 9. Soit ϕ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chaqun des endomorphismes répondre si il est diagonalisable. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres et la matrice correspondante dans cette base en donnant la matrice de passage.

Exercice 10. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e_2),\ u(e_1 + e_3), u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 12. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 13. Soit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 14. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : on peut utiliser le resultat de l'exercice 7.

Exercice 15. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui donner une telle base.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. On considère V, l'espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et u, l'endomorphisme de cet espace, défini par

$$u\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 18. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant A trouver une solution Z dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $Z^2 = A$