**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI

---

**Correction du devoir commun numéro 5**

---

**Exercice 1.** (Questions de cours)
Pour la correction, voir le cours !

**Exercice 2.**

1. Les deux matrices sont triangulaires donc $P_A = P_B = (2-X)^4 = (X-2)^4$.
2. Par définition du polyôme minimal et par la question 1, $m_A$ et $m_B$ divisent $(X-2)^4$. On a $A - 2 \cdot I_4 \neq 0$ et (en le calculant) $(A - 2 \cdot I_4)^2 = 0$ donc $m_A = (X-2)^2$. On montre de même que $m_B = (X-2)^2$.
3. (a) Supposons $A$ et $B$ semblables. Il existe $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Par conséquent,

$$B - 2I_4 = P^{-1}AP - 2I_4 = P^{-1}AP - P^{-1} \cdot 2I_4 \cdot P = P^{-1}(A - 2I_4)P$$

   ce qui signifie que $A - 2I_4$ et $B - 2I_4$ sont semblables.

   (b) Supposons par l'absurde $A$ et $B$ semblables. Alors par la question précédente, $A - 2I_4$ et $B - 2I_4$ sont semblables. Or le rang de $A - 2I_4$ est 2 alors que celui de $B - 2I_4$ est 1 ce qui est absurde. Ainsi, $A$ et $B$ ne sont pas semblables.
4. Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal ne sont pas nécessairement semblables.

**Exercice 3.** *Etudier si les fonctions suivantes se prolongent par continuité en* $(0,0)$ *ou non.*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + |x+y|}$$

Il suffit de démontrer que la fonction admet une limite en $(0,0)$. On remarque déjà qu'elle est définie partout ailleurs, car le dénominateur ne s'annule qu'à l'origine. Ensuite, on remarque que le degré du numérateur est de 3 (si on considère la somme des degrés en $x$ et en $y$), on a donc de bonnes chances d'avoir une limite nulle. On va donc majorer : comme $|x+y| \geq 0$, on a :

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} = \|(x,y)\|_2$$

ce qui tend bien vers 0 quand $\|(x,y)\|_2$ tend vers 0. Donc $f$ est bien prolongeable par continuité en $(0,0)$, et sa limite vaut 0.

$$f(x,y) = \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}$$

On va de même étudier la limite de $f$ en $(0,0)$. On remarque qu'ici, $f$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{(0,0)\}$, il faut donc faire attention a ne la considérer que sur ce domaine. Ici, on voit que la somme des puissances au numérateur vaut la puissance au dénominateur, on risque donc d'avoir un comportement différent suivant les directions. Considérons $f$ sur la droite $y = mx$, $m \in \mathbb{R}^+$.

$$f(mx,my) = \frac{m^{\frac{3}{2}}x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{1+m^2}$$

Cette quantité dépend de $m$ (regarder par exemple les valeurs en $m = 0$ et $m = 1$), or la limite doit être unique, cette dernière ne peut donc pas exister. $f$ n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+2y^2-3x^3y}$$

Ici, la situation est plus compliquée, on ne sait pas trop comment minorer le dénominateur, et les puissances ne sont pas les mêmes dans tous les termes du dénominateur. Pour y voir plus clair, passons en polaires!

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^6\cos^6\theta + 2\rho^2\sin^2\theta - 3\rho^4\cos^3\theta\sin\theta} \sim_{\rho\to 0} \rho^2\frac{\cos^3\theta}{2\sin\theta} \longrightarrow_{\rho\to 0} 0$$

Ceci est valable pour $\theta \neq 0$, pour $\theta = 0$, $f$ est nulle. Cependant cet équivalent dépend de $\theta$ et diverge pour $\theta \to 0$, il paraît donc difficile de pouvoir faire une majoration uniforme en $\theta$ de $f$. De plus, si on fixe $\rho$, on obtient un équivalent $f \sim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\rho^2}$ qui diverge quand $\rho$ tend vers 0. Or, on voit que pour les termes du dénominateur soient du même ordre, il faut faire $y = mx^3$. Pour $m = 1$, on voit que la fonction n'est pas bien définie, le dénominateur s'annule (on aurait d'ailleurs pu le remarquer en étudiant l'ensemble de définition), on ne peut donc pas considérer $f$ sur cette courbe. Pour $m = 2$, on a :

$$f(x,x^3) = \frac{x^6}{x^6(1+2m^2-3m)} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Suivant cette courbe, la fonction ne tend pas vers la même valeur que suivant les droites, $f$ ne peut donc pas avoir de limite en $(0,0)$, et elle n'est pas prolongeable par continuité.

**Exercice 4.** 1. On a $M(2I_n - M) = I_n$ donc $M$ est inversible.

2. On a $M^4 = MM^3 = MM^{-1} = I_n$ donc $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de $M$. Ce polynôme a au plus quatre racines dans $\mathbb{C}$. Or $1, -1, i$ et $-i$ sont des racines évidentes distinctes de $P(X)$ donc
$$P(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$
En particulier, $P(X)$ est scindé à racines simples donc $M$ est diagonalisable.

3. On a $M^2 - 2M + I_n = 0$ donc $Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $M$. Le polynôme minimal de $M$ divise $Q(X)$ et ses racines complexes sont les valeurs propres de $M$ donc le spectre de $M$ est $\{1\}$.

4. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^2 = 2M - I_n$ et $M^3 = M^{-1}$ alors, d'après les questions précédentes, le polynôme minimal $m(X)$ de $M$ divise $(X-1)^2$ et est unitaire et scindé à racines simples car $M$ est diagonalisable. Ainsi, $m(X) = X - 1$ et $M = I_n$ car $m(X)$ annule $M$. Réciproquement, on a bien $I_n^2 = I_n = 2I_n - I_n$ et $I_n^3 = I_n = I_n^{-1}$.

   Il existe donc une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 2M - I_n$ et $M^3 = M^{-1}$ et cette matrice est $I_n$.

**Exercice 5.** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par*

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

*Montrer que* $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0$.

On commence par justifier l'existence de ce qu'on va démontrer : la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et ne s'annule qu'en $(0,0)$. La fonction ln étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On peut donc calculer le gradient de cette fonction scalaire (à valeurs dans $\mathbb{R}$) :

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Par les mêmes justifications que précédemment, cette fonction est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on peut donc calculer la divergence de cette fonction vectorielle (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x \times 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{4}{x^2+y^2} - \frac{4x^2+4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

*Remarque :* L'opérateur div $\circ$ grad s'appelle l'opérateur laplacien, on le note $\Delta$. Il est très important, notamment en physique et dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

**Exercice 6.**

1. Faux.

   L'application $f$ n'est pas continue en $(0,0)$ donc pas différentiable. En effet, sa restriction à la droite d'équation $y = x$ est l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{\cos(x^2)-1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 23$. La limite suivante est bien connue : $\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = 0$ ce qui montre que la limite en 0 de $h$ est 0 et n'est pas égale à $h(0)$.

2. Vrai.

   Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On a alors $P_A = X^2 + 1$. Les seuls polynômes réels qui divisent $P_A$ sont 1 et $P_A$. Ainsi le polynôme minimal de $A$ est $X^2 + 1$.

3. Vrai.

   Posons $L = u$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, soit

$$\alpha(h) = \frac{\|u(x_0 + h) - u(x_0) - L(h)\|}{\|h\|}.$$

   Alors pour tout $h \neq 0$, $\alpha(h) = 0$ (par linéarité de $u$) et on a bien $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$ ce qui montre que $u$ est différentiable en $x_0$ de différentielle $u$.

4. Faux.

   La matrice $I_n$ satisfait l'égalité $M(M - I_n)$ et elle est inversible.