Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI

Partie commune - Devoir numéro 5 - Corrigé de la partie Algèbre

---

Dans la suite *je ferai quelques commentaires* suivant les erreurs trouvées dans les copies.

Exercice 1. On considère une fonction $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable et à dérivée continue.
Soient a, b, R des réels strictement positifs tels que $b \geq a$. On suppose que : $\forall x > R,\ f(x) = 0$.
Le but de l'exercice est l'égalité suivante :

$$(\star) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln(\frac{a}{b}).$$

1. Montrer que l'intégrale ci-dessus est bien définie en 0 et qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_0^{M} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$$

Commentaire : Ici certains ont fait comme si l'intégrale était une fonction de x et ont cherché à montrer que cette soit-disant fonction était bien définie en 0. Ce n'est bien entendu pas de ça qu'il s'agissait. On demande de montrer qu'il n'y a pas de problèmes de convergence de l'intégrale au voisinage de 0 ainsi qu'en l'infini.
En 0 la limite de la fonction $x \mapsto \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ est du type 0 sur 0 donc a priori indéterminée.
Concernant 0, montrons que la fonction $x \mapsto \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. Notons g cette fonction. Nous avons pour $x > 0$, $g(x) = b \times \frac{f(bx)-f(0)}{bx-0} - a \times \frac{f(ax)-f(0)}{ax-0}$. Dans cette dernière expression, lorsque x tend vers 0, on obtient bien une limite qui est $bf'(0) - af'(0)$. Ainsi g est bien prolongeable par continuité en 0 si on pose $g(0) = (b-a)f'(0)$.

Variante : On pouvait aussi utiliser les DL. Notons $f_a(x) = f(ax)$ et $f_b(x) = f(bx)$. Ces deux fonctions sont de classe C^1 au voisinage de 0 et on a : $f_a(x) = f_a(0) + xf'_a(0) + o(x) = f(0) + xaf'(0) + o(x)$.
Par conséquent, $g(x) = (b-a)f'(0) + \varepsilon(x)$ où ε est une fonction ayant une limite nulle en 0 et on retrouve le résultat précédent.

Posons $M = R/a$. Pour $x > M$, on a : $bx \geq ax > R$ d'où $f(bx) = f(ax) = 0$ ce qui donne

$$\int_M^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = 0$$

d'où l'égalité demandée.

2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale double suivante et en déduire l'égalité $(\star)$.

$$\iint_D f'(xy) dx dy$$

où $D = [a;b] \times [0;M]$.

Commentaire : Dans cette question, de nombreux étudiants ont perdu des points simplement à cause d'une primitive erronée. Pensez à dériver pour vérifier que votre primitve est la bonne.

Notons I l'intégrale à calculer. D'un côté, nous avons :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^M \left(\int_a^b f'(xy)dx\right)dy \\ &= \int_0^M \left([\frac{f(xy)}{y}]_{x=a}^b\right)dy \\ &= \int_0^M \frac{f(by)-f(ay)}{y}dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx \text{ par la question 1.} \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\int_0^M f'(xy)dy\right)dx \\ &= \int_a^b \left([\frac{f(xy)}{x}]_{y=0}^M\right)dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{f(Mx)}{x} - \frac{f(0)}{x}\right)dx \\ &= \int_a^b \frac{f(Mx)}{x}dx - f(0)\int_a^b \frac{1}{x}dx \\ &= \int_a^b \frac{f(Mx)}{x}dx - f(0)(\ln(b) - ln(a)) \\ &= \int_a^b \frac{f(Mx)}{x}dx + f(0)(\ln(a) - \ln(b)) \\ &= \int_a^b \frac{f(Mx)}{x}dx + f(0)\ln(\frac{a}{b}). \end{aligned}$$

Pour finir, montrons que $\int_a^b \frac{f(Mx)}{x}dx$ est nulle ce qui conclura la question. Pour $x > a$, $Mx > Ma = R$ d'où $f(Mx) = 0$ et cette intégrale est bien nulle.

Exercice 2. Soit $(E, < \ , \ >)$ un espace euclidien de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ une base orthonormée de E. Soit f un endomorphisme de E.

Soit k un nombre réel strictement positif. On suppose que pour tout $v \in E$, $\|f(v)\| = k\|v\|$.

On dit que f est une isométrie vectorielle de rapport k.

Commentaire. Ici j'ai fait un lapsus, j'ai écrit isométrie en pensant similitude, ce qui a un peu destabilisé certains étudiants. Ceci dit, j'ai été clément dans ma façon de noter et de plus, il fallait répondre aux différentes questions simplement en utilisant l'hypothèse (i.e. $\forall v \in E,\ \|f(v)\| = k\|v\|$) et pas en se basant sur le mot isométrie.

1. Montrer que $< f(b_1), f(b_2) >= 0$.

   Indication : on pourra considérer la norme de $f(b_1 + b_2)$.

   On a : $\|f(b_1+b_2)\|^2 =< f(b_1+b_2), f(b_1+b_2) >=< f(b_1)+f(b_2), f(b_1)+f(b_2) >= \|f(b_1)\|^2 + 2 < f(b_1), f(b_2) > + \|f(b_2)\|^2$. Par hypothèse, les b_i forment une base orthonormée donc b_1 et b_2 sont de norme 1 et donc (par hypothèse sur f) $\|f(b_1+b_2)\|^2 = k^2 + 2 < f(b_1), f(b_2) > +k^2 = 2k^2 + 2 < f(b_1), f(b_2) >$.

   D'un autre côté, $\|b_1+b_2\|^2 =< b_1+b_2, b_1+b_2 >= \|b_1\|^2 + 2 < b_1, b_2 > + \|b_2\|^2 = \|b_1\|^2 + \|b_2\|^2 = 2$ (car c'est une base orthonormée) et par hypothèse sur f, $\|f(b_1+b_2)\| = k\|b_1+b_2\|$ d'où $\|f(b_1+b_2)\|^2 = k^2 \times 2$.

   En réunissant les deux calculs précédents, on obtient $2 < f(b_1), f(b_2) >= 0$ puis $< f(b_1), f(b_2) >= 0$.

2. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Écrivons $f(b_1) = ab_1 + bb_2$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et $f(b_2) = cb_1 + db_2$ (avec $c, d \in \mathbb{R}$). Le but est de montrer que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que (c, d) est égal à $(-b, a)$ ou à $(b, -a)$.

Pour commencer, si (a, b) était nul alors $f(b_1)$ serait le vecteur nul ce qui entrainerait $k\|b_1\| = 0$ puis $\|b_1\| = 0$ (puisque $k > 0$), ce qui serait absurde. Ainsi $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrons maintenant que (c, d) est égal à $(-b, a)$ ou à $(b, -a)$.

Par la question 1, $f(b_2)$ est orthogonal à $f(b_1)$. Ceci entraine : $0 =< ab_1 + bb_2, cb_1 + db_2 >= ac + bd$. Ainsi le determinant de la matrice

$$\begin{pmatrix} c & -b \\ d & a \end{pmatrix}$$

est nul. Cela signifie que le vecteur (c, d) (de $\mathbb{R}^2$) est colinéaire à $(-b, a)$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(c, d) = \lambda(-b, a)$.

D'autre part, $\|f(b_1)\|^2 = a^2 + b^2$, $\|f(b_2)\|^2 = c^2 + d^2$ et par hypothèse sur f, $f(b_1)$ et $f(b_2)$ sont de même norme donc : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (-\lambda b)^2 + (\lambda a)^2 = \lambda^2(a^2 + b^2)$ d'où $\lambda^2 = 1$ ou encore λ est égal à 1 ou -1 ce qui entraine que (c, d) est égal à $(-b, a)$ ou $(b, -a)$.

3. Réciproquement, on suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.
   Montrer que f est une isométrie vectorielle dont on précisera le rapport en fonction de a et b.

   Je ne vais pas détailler la solution... Ici, il s'agit de considérer $v = xb_1 + yb_2 \in E$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), de calculer $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; ainsi que $\|f(v)\|$ et de constater que $\|f(v)\| = k\|v\|$ avec $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ (qui est le rapport demandé).