Université Claude Bernard Lyon-1
Licence « Sciences et technologie »

CONTRÔLE FINAL de Math. II Algèbre

13 juin 2013 — durée 2 h

Le barème est indicatif.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Questionnaire (5,5 points)

1. La matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
est-elle inversible ? (Justifier brièvement !)
2. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On note M et M' les matrices d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associées à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. Exprimer M en fonction de M' et P.
3. Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ dans l'anneau des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{X^2+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice I (7 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On pose :
$$P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X^2 - X, \quad P_3 = X^2 - 1.$$

1. Rappeler la dimension de E.
2. (a) Exprimer 1, X et X^2 comme des combinaisons linéaires de (P_1, P_2, P_3). En déduire que la famille $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base.
   (b) Écrire la matrice de passage de la base (P_1, P_2, P_3) à la base $(1, X, X^2)$.
   (c) Déterminer les coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3) des vecteurs suivants :
   $$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X - 2, \quad Q_3 = X^2 - 2X.$$
   (d) Démontrer rapidement que $\mathscr{C} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(2). \end{array}$$
On admet qu'elle est linéaire. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ de la base $\mathscr{D} = (1)$.
   (a) Déterminer la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$, puis la matrice de φ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer le rang de φ, l'image de φ et le noyau de φ.

Exercice II (8,5+1 points)

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, on note

$$f_1 = (2, 1, -1), \quad f_2 = (3, 2, 0), \quad f_3 = (1, 0, -1).$$

On note aussi $D = \mathrm{Vect}(f_1)$ et $E = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$.

1. (a) Quelle est la dimension de E ?
   (b) A quelle condition un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à E ?
2. (a) Montrer que l'intersection de D et E est réduite à $\{\overrightarrow{0}\}$. En déduire que D et E sont supplémentaires, i.e., $\mathbb{R}^3 = D \oplus E$.
   (b) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit P la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Soit $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ de v dans la base (f_1, f_2, f_3) en fonction de x_1, x_2 et x_3.
4. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. D'après la question 2a, on peut trouver $v_1 \in D$ et $v_0 \in E$ uniques tels que $v = v_1 + v_0$. On pose alors : $p(v) = v_1$.
   (a) Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice M' de p dans la base (f_1, f_2, f_3).
   (c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et soient $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base (f_1, f_2, f_3). Montrer que l'on a :
$$p(v) = x'_1 f_1.$$
5. (Bonus) Déterminer la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.