Exercice 1

On considère l'application définie sur $\mathbf{C}^2$ par :

$$q((w,z)) = 2\,\mathcal{R}e(\overline{z}w)$$

(où la notation $\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle).

Montrer que q est une forme quadratique hermitienne sur $\mathbf{C}^2$.

Exercice 2

1) a) Montrer que tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

b) Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension impaire admet au moins un vecteur propre.

2) Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien. Montrer que toute valeur propre (réelle) α de u vérifie :

$$\alpha = -1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 1.$$

Dans la suite de l'exercice, E est un espace euclidien de dimension 3 et u est un endomorphisme orthogonal de E. On suppose que -1 n'est pas valeur propre de u.

3) Montrer que 1 est valeur propre de u.

Dans la suite de l'exercice, on note x un vecteur propre de u pour la valeur propre 1, y un vecteur non nul de E orthogonal à x, F le sous-espace de E engendré par x et $y+u(y)$ et σ la symétrie orthogonale par rapport à F.

4) Montrer que $y + u(y) \neq 0$.

5) Montrer que $(y+u(y)) \perp x$ et que $(y-u(y)) \perp x$.

6) Quelle est la dimension de F ?

7) Montrer que $(y+u(y)) \perp (y-u(y))$.

8) Montrer que $\sigma(x) = u(x)$ et que $\sigma(y) = u(y)$.

9) On note $\tau = \sigma \circ u$.

a) Montrer que $\sigma \circ \tau = u$.

b) Montrer que $\tau \neq \mathrm{Id}$.

c) Montrer que τ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.