
Partie commune - Devoir numéro 3 - Corrigé

Partie Algèbre

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On le munit du produit scalaire suivant :

$$< A, B >= \mathrm{Tr}((^tA) \cdot B).$$

Ici Tr désigne la trace. Soit $F = \{A \in E \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

1. *Vérifier que* $(E, < \ , \ >)$ *est bien un espace euclidien.* L'application $A \mapsto {}^tA$ est linéaire, donc $(A, B) \mapsto {}^tAB$ est bilinéaire. La trace étant linéaire, par composition le produit donné est bilináire. Il est symétrique car
$$\mathrm{Tr}(^tA \cdot B) = \mathrm{Tr}^t(^tA \cdot B) = \mathrm{Tr}(^tB \cdot A) =< B, A > .$$
De plus, $< A, A >= \mathrm{Tr}(^tA \cdot A)$. Or les coefficients diagonaux du produit ${}^tAA$ sont $\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{ki}$, où les α_{ij} sont les coefficients de ${}^tA$, donc valent a_{ji}. Par conséquent
$$< A, A >= \sum_{k=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$
et le produit est nul si tous les coefficients sont nuls, donc si $A = 0$. C'est donc bien un produit scalaire.
2. *Vérifier que* F *est un sous-espace vectoriel et en donner sa dimension.* L'application trace est une forme linéaire non nulle, donc son noyau est un sous-espace vectoriel, et par le théorème du rang la dimension de F est celle de E, qui vaut n^2, moins la dimension de l'image de la trace, qui vaut 1 puisqu'elle est non triviale. D'où $\dim F = n^2 - 1$.
3. *Pour* $A \in E$, *montrer que* $A \in F^\perp$ *si et seulement si pour tout* $M \in F$, $\mathrm{Tr}((^tM) \cdot (A - \mathrm{Id})) = 0$. *En déduire une base de* $F^\perp$. L'égalité proposée est équivalente à $< M, A - \mathrm{Id} >= 0$. Or $< M, \mathrm{Id} >= \mathrm{Tr}M = 0$, donc c'est équivalent à $\forall M \in F, \ < M, A >= 0$, ce qui est la définition de $A \in F^\perp$. Puisque $\dim F = n^2 - 1$, l'orthogonal de F est de dimension 1. On constate que Id est non nul et appartient à $F^\perp$, donc en forme une base.
4. Dans cette question, $n = 3$.
   (a) *Donner une base "simple" de* F. *(On entend par simple une base dont les éléments sont des matrices ayant autant de coefficients nuls que possible.)* On choisit la famille E_{ij} pour $i \neq j$ et $e_2 = E_{11} - E_{22}$, et $e_3 = E_{11} - E_{33}$. Les premiers forment une famille de 6 vecteurs indépendants (c'est une sous-famille d'une base) et appartenant à F, et forment un sous-espace d'intersection nulle avec le sous-espace formé par les deux derniers. Par ailleurs, e_2 et e_3 sont linéairement indépendants, donc la réunion de ces vecteurs est une famille libre de cardinal $8 = 3^2 - 1$, qui est la dimension de F, donc c'est une base de F.
   (b) *Déterminer la distance d(A,F) où* $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A = \lambda \, \mathrm{Id} + B$, avec $\lambda \, \mathrm{Id} \in F^\perp$ et $B \in F$. Donc la distance vaut $|\lambda| || \mathrm{Id} ||$. Or $| < A, \mathrm{Id} > | = |\lambda| || \mathrm{Id} ||^2$, donc $|\lambda| || \mathrm{Id} || = |TrA / || \mathrm{Id} ||$. Or $< \mathrm{Id}, \mathrm{Id} >= 3$, et la trace de A vaut 6, donc $d(A, F) = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
5. *Ici n est à nouveau supposé quelconque.*
Soit $A \in E$.
   (a) *Montrer que* $p_{F^\perp}(A) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Id}$. On a $A = \lambda \, \mathrm{Id} + B$, avec $\lambda \, \mathrm{Id} \in F^\perp$ et $B \in F$. Donc
$$< A, \mathrm{Id} >= \lambda < \mathrm{Id}, \mathrm{Id} >= \lambda Tr \, \mathrm{Id} = n.$$
D'où $\lambda = \frac{< A, \mathrm{Id} >}{n} = \frac{1}{n} TrA$. Donc $p_{F^\perp}(A) = \frac{1}{n} TrA \, \mathrm{Id}$.
   (b) *En déduire* $d(A, F)$. On a donc
$$d(A, F) = ||p_{F^\perp}(A)|| = \frac{1}{n}|TrA| || \mathrm{Id} || = \frac{1}{\sqrt{n}}|TrA|.$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.*

1. *Justifier que u est autoadjoint.* La base canonique est orthonormée pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$, donc un endomorphisme est autoadjoint pour ce produit scalaire si sa matrice dans une telle base est symétrique, ce qui est le cas.
2. *Déterminer les valeurs propres de u.* On a $A - \mathrm{Id}$ est de rang égal à un, donc son noyau est de dimension 2. Donc 1 est valeur propre, et le sous-espace propre associé est de dimension 2, donc la multiplicité de 1 est 2. Il reste donc une valeur propre λ. On a $6 = \mathrm{Tr} A = 1 + 1 + \lambda$ donc $\lambda = 4$.
3. *Détermnier une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de u.* On a $(A - \mathrm{Id})(e_1 - e_2) = (A - \mathrm{Id})(e_1 - e_3) = 0$, donc $\epsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\epsilon_3 = e_1 - e_3$ qui sont libres forment une base de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})$. On en veut des orthogonaux, donc on cherche t tel que $\epsilon_2 \perp \epsilon_3' = \epsilon_2 + t\epsilon_3$, ce qui est équivalent à $\lambda = -2$, soit $\epsilon_3' = (-1, -1, 2)$. Donc $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$ sont orthonormés, et
$$e_3' = e_1' \wedge e_2' = \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, -2, -2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$
est orthogonal à e_1' et e_2' et de norme un. Puisque A est symétrique, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc e_3' est un vecteur propre de A. On constate que la valeur propre associée est 4.

Partie Analyse

Exercice 3. Soit f la série entière de variable complexe $f(z) = \sum_1^\infty \frac{z^{n!}}{n!}$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de f.* On applique le critère de D'Alembert à la série de terme général $u_n = \frac{z^{n!}}{n!}$. Pour $z \neq 0$, $u_n \neq 0$ pour tout n, et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} z^{(n+1)! - n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} z^{n.n!}.$$
Pour $|z| > 1$, cette suite tend vers l'infini car
$$\frac{1}{n}|z^{nn!}| = \frac{1}{n}|z|^{nn!} \geq \frac{1}{n}|z|^n \to_{n\to\infty} \infty.$$
Cette dernière affirmation découle de D'Alembert pour $v_n = \frac{|z|^n}{n}$. On a
$$v_{n+1}/v_n = |z|\frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} |z| > 1$$
donc $v_n \to_{n\to\infty} \infty$. Au total, la série des u_n diverge. Pour $|z| < 1$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}|z|^{n.n!} \leq |z|^n \to_{n\to\infty} 0,$$
donc $\sum u_n$ converge (absolument). Par définition du rayon de convergence, on a $R = 1$.
2. *La série converge-t-elle sur son cercle de convergence ?* Pour $|z| = 1$, on a $|u_n| = \frac{1}{n!}$ dont la somme est convergente car elle vaut e. Donc la série converge sur son cercle de convergence.
3. *Montrer que $\forall x \in [0, 1[,\ x \leq f(x) \leq e^x$.* Pour $x \in [0, 1[$, $\frac{x^{n!}}{n!} \geq 0$ donc $f(x)$ est supérieure à son premier terme x. De plus pour $0 \leq x < 1$ et $n \geq 1$, $x^{n!} \leq x^n$, donc
$$f(x) \leq \sum_1^\infty \frac{x^n}{n!} \leq \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = e^x.$$
4. *Montrer que $\forall x \in [0, 1], f'(x) \leq \frac{1}{1-x}$.* On peut dériver f sur son intervalle de convergence, donc f' existe et pour $0 < x < 1$,
$$f'(x) = \sum_1^\infty x^{n!-1} \leq \sum_1^\infty x^{n-1} = \sum_0^\infty x^n = 1/(1-x).$$

Exercice 4. *Déterminer le développement en série entière de la fonction* $f(x) = \exp(-\pi x)$ *en* $z = i$. On écrit $z = i + u$, donc

$$f(i+u) = e^{-i\pi}e^{-\pi u} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{n!}u^n = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^n}{n!}(z-i)^n.$$

Exercice 5. Soit (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 2xy = 0$.

1. *Trouver toutes les solutions de E développables en série entière au voisinage de zéro.* Soit $y = f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ une solution, qu'on suppose de rayon de convergence > 0. On a

$$(1+x^2)y' = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty a_n n x^{n+1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_0^\infty a_{n-1}(n-1)x^n$$

avec $a_{-1} = 0$. Par ailleurs $2xy = \sum_0^\infty 2a_{n-1}x^n$, donc l'équation est équivalente à

$$\sum_0^\infty (a_{n+1}(n+1) + a_{n+1}(n+1))x^n = 0.$$

Par unicité du DSE de l'application nulle, on a donc $\forall n \geq 0, a_{n+1} = -a_{n-1}$ car $n+1 \neq 0$ et $a_{-1} = 0$. On a $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate, et montrons que

$$\forall k \geq 0,\ a_{2k} = (-1)^n a_0.$$

C'est vrai pour $k = 0$. Supposons que ce soit vrai pour $k \geq 0$, alors $a_{2(k+1)} = -a_{2k} = -(-1)^k a_0$ par l'équation trouvée et par l'hypothèse de récurrence. Donc $a_{2(k+1)} = (-1)^{k+1}a_0$ et l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $k+1$.

2. *Quel est le rayon de convergence des solutions trouvées ?* Les solutions trouvées sont $a_0 \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$. Si $a_0 = 0$, le rayon de convergence R est infini. Si $a_0 \neq 0$, la solution est $a_0(1+x^2)^{-1}$ qui a un rayon de convergence égal à un.

3. *Exprimer la solution qui vaut* 1 *en* 0 *sous forme de fonction classique.* D'après la question précédente, on a $a_0 = 1$, donc la solution est $1/(1+x^2)$.