Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math I Algèbre - PMI

Feuille d'exercices n° 5

GÉOMÉTRIE

---

1 Bases dans le plan

Exercice 1. Déterminer si les couples de vecteurs qui suivent forment des bases du plan. Lorsque ce ne sont pas des bases, écrire explicitement leur colinéarité. Lorsque ce sont des bases, calculer l'aire du parallélogramme correspondant :
$a)((0,0),(0,0))$; $b)((0,1),(1,1))$; $c)((2,4),(1,2))$; $d)((0,0),(1,0))$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,0))$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre en (λ,μ) le système $\lambda(1,-1)+\mu(2,0)=(x,y)$.
3. Écrire la base canonique $\mathcal{B}_c$ du plan dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire, exprimer les vecteurs de la base canonique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
4. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à la nouvelle base $\mathcal{B}$? Et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$?

Exercice 3. Soient $B = (e_1,e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $B' = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que B' définie la même orientation que B ?
3. Calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque $V = xe_1 + ye_2$ dans la base B'.
4. Quelle est la matrice de passage de B à la nouvelle base B' ? Et de B' à B ?

Exercice 4. Soit $((a,c),(b,d)) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

1. À quelle condition $((a,c),(b,d))$ est-elle une base ? On suppose désormais cette condition remplie.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre en $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ le système $\lambda\,(a,c)+\mu\,(b,d)=(x,y)$.
3. Écrire la base canonique du plan dans la base $((a,c),(b,d))$.

Exercice 5. Points sur le plan

1. Montrer que un quadrilatère de sommets de coordonnées $(4,2),(-2,-1),(0,-4),(6,-1)$ est un parallelogramme.
2. Trois des quatres sommets d'un parrallelogramme ont pour coordonnées $(1,2),(4,1),(0,0)$. Trouver les coordonnées du quatrième sommet.
3. Détérminer si les points suivants appartiennent à la même droite :
   (a) $(2,4),(-1,0),(5,8)$; (b) $(2,4),(3,5),(5,7),(0,2)$; $(c)(-1,2),(0,-1),(2,4)$;
   $(d)(1,-1),(2,-1),(0,0),(-4,3)$

Exercice 6. **L'aire d'un triangle**

1. Soient $P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_2),\ P_3 = (x_3, y_3)$ des sommets d'un triangle. Démontrer que l'aire du triangle $P_1P_2P_3$ est égale à
$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right|.$$
2. Soit $A = (2, 4)$ et $B = (-1, 3)$. Soit $P = (x, y)$ un point tel que l'air du triangle ABP est égale à 6. Trouver l'équation qui lie x et y.

2 Droites dans le plan

Exercice 7. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur directeur, puis les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(1, 1)$ et de vecteur normal $(2, -3)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \right\}$.
3. $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $x - 4y = 8$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite d'équation $y = 3x + 5$.
5. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(-1, 2)$ et $(3, 1)$.
6. $\mathcal{D}_6$ la médiatrice du segment reliant $(0, 2)$ et $(-1, 1)$.
7. $\mathcal{D}_7 = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle \overrightarrow{OM}, u \rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0, 0)$ et u le vecteur $(1, 1)$.

Exercice 8. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur normal, puis en donner une équation.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $(1, -1)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \{ (1, 4) + t(1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \{ (2 + 3t, 4t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1, 1)$ et $(0, 1)$.
5. $\mathcal{D}_5$ la médiatrice du segment reliant $(1, 2)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 9. **Deux droites**

Soient D_1 et D_2 deux droites dans le plan, données par leurs équations implicites ou paramétriques. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas ou elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $D_1 :\ 3x + 5y - 2 = 0; \qquad D_2 :\ x - 2y + 3 = 0.$
2. $D_1 :\ 2x - 4y + 1 = 0; \qquad D_2 :\ -5x + 10y + 3 = 0.$
3. $D_1 : \begin{cases} x = & 3 + 4t \\ y = & 2 - t \end{cases}; \qquad D_2 : \begin{cases} x = & 5 - s \\ y = & 2 + 3s \end{cases}$
4. $D_1 : \begin{cases} x = & 1 + 2t \\ y = & 2 - 3t \end{cases}; \qquad D_2 : \begin{cases} x = & 3 - 4s \\ y = & -1 + 6s \end{cases}$

5. $D_1 : x - 2y + 3 = 0;$ $\quad D_2 : \begin{cases} x = & 2 + s \\ y = & 3 - 2s \end{cases}$

6. $D_1 : 3x - 2y + 1 = 0;$ $\quad D_2 : \begin{cases} x = & 1 - 4s \\ y = & 2 - 6s \end{cases}$

Exercice 10. Résoudre en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les systèmes qui suivent.

1. $\begin{cases} x + y & = & 5 \\ y & = & 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x + 2y & = & 1 \\ 3x + 3y & = & 2 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x + 3y & = & 5 \\ 2x + y & = & 2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 2x + 2y & = & 5 \\ 8x + 8y & = & 20 \end{cases}$.

Exercice 11. Trois droites

Soient $ax + by + c = 0,\ a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$ des équations de trois droites. A quelle condition sur les coéfficientes ces trois droites sont parallèles ? sont concourantes ?

Exercice 12. *Médiatrice.*

1. Soit A et B deux points distincts. On note I leur milieu, c'est-à-dire le point I tel que $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.
   Montrer que, pour tout point M, sont équivalents :
   (i) $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$;
   (ii) $\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$.
   On appelle *médiatrice* du segment $[A, B]$ l'ensemble $\left\{ M \;\middle|\; \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \right\}$.
2. Soit A, B et C trois points non alignés.
   Montrer que l'intersection des médiatrices de $[A, B]$, $[B, C]$ et de $[A, C]$ est non vide.

Exercice 13. On note A et B les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer en fonction de a la nature de l'ensemble

$$E = \left\{ M \;\middle|\; \|\overrightarrow{AM}\| = a\|\overrightarrow{BM}\| \right\}.$$

Exercice 14. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite du plan d'équation $y = 3x$.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_1$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_1$.
2. Calculer la distance du point $M_1 = (3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}_1$.

Exercice 15. *Projection et symétrie orthogonales (droite).*

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur directeur u.
Soit M un point. On définit P par $\overrightarrow{AP} = \langle \frac{u}{\|u\|}, \overrightarrow{AM} \rangle \frac{u}{\|u\|}$.

1. Montrer que $P \in \mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{MP} \perp u$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$, $\|\overrightarrow{MP} + tu\| > \|\overrightarrow{MP}\|$.
3. On définit M' par $\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM}$. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MP}$.

3 Points complexes

Exercice 16. On note A le point d'affixe $4+2i$ et O celui d'affixe 0.
Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 17.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $v^\perp \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $w \in \mathbb{R}^2$, l'on ait :
   $$\det(v, w) \;=\; \langle v^\perp, w \rangle.$$
   (b) On suppose v non nul. Montrer que $(v, v^\perp)$ est une base orthogonale.
2. Soit A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c.
   (a) Exprimer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à l'aide de a, b et c.
   (b) À quelle condition sur a, b et c les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que soient alignés les points d'affixes z, iz et i.

Exercice 19.

1. Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(4, 7)$ et de rayon 3.
2. Écrire l'équation du même cercle dans $\mathbb{C}$ - les points du cercle d'affixe $z \in \mathbb{C}$ du centre d'affixe $4+7i$ de rayon 3.
3. Montrer que l'ensemble
   $$\mathcal{C}_2 \;=\; \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \right\}$$
   est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

4 Applications et matrices

Exercice 20. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(2, 1) = (2, -3)$ et $h(1, -1) = (3, -1)$.
Déterminez la matrice de h.

Exercice 21. On considère des vecteurs $\overrightarrow{U} = x\,\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{V} = y\,\overrightarrow{j}$ dans le repère orthonormé $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. En coordonnées on peut les écrire
$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

1. On fait tourner ces vecteurs autour de $(0, 0)$ de l'angle θ. Quelles sont les coordonnées des deux nouveaux vecteurs ?
2. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autour de $(0, 0)$ de l'angle θ. Quelles sont les coordonnées du nouveau vecteur ?

3. Déterminer la matrice de la transformation du plan correspondant à l'opération qui tourne chaque vecteur de l'angle θ autour de l'origine. Cette matrice, notons-la A, donne la réponse à la question précédente : le vecteur tourné a pour coordonnées $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la matrice B de la transformation du plan qui multiplie la première coordonnée de chaque vecteur ("x") par 3 et laisse l'autre ("y") inchangée ?
5. Trouver la matrice qui correspond au resultat des deux opérations consécutives sur le plan : d'abord la multiplication de x par 3, puis la rotation d'angle $\theta = \pi/6$ autour de l'origine.
6. Est-ce qu'on obtient la même matrice si on change l'ordre des opérations dans la question précédente ?

Exercice 22. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le vecteur v qui est image de u.
2. Déterminez le vecteur w qui a pour image u.

Exercice 23. Déterminez les matrices des applications linéaires suivantes :

1. $h_1(x, y) = (2x - y, x)$,
2. $h_2(x, y) = (x - y, 0)$
3. $h_3(x, y) = (x, y, x - y)$
4. $h_4(x, y) = (x - y, y - x)$
5. $h_5(x, y) = (0, y, x + 2y)$
6. $h_6(x, y, z) = (x + 2y, z - 2y)$
7. $h_7(x, y, z) = (z, y, x)$

Exercice 24. On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Rappeler l'effet sur $\mathbb{C}$ des transformations du plan suivantes :
   (a) pour $a \in \mathbb{C}$, la translation du vecteur d'affixe a ;
   (b) pour $(a, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a ;
   (c) pour $(a, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la rotation d'angle θ et de centre = d'affixe a ;
   (d) pour $(a, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a.
2. Déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
   (a) $\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3$.
   (b) $\varphi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto i\,\bar{z}$.
3. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
4. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 25. Donnez, pour chaque application linéaire H du plan $\mathbb{R}^2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, la matrice de H.

1. Symétrie d'axe Ox.
2. Symétrie d'axe Oy.
3. Symétrie d'axe $y = x$.
4. Symétrie d'axe $y = -x$.
5. Projection orthogonale sur Ox.
6. Projection orthogonale sur Oy.
7. Homothétie de centre O et de rapport 2.
8. Rotation de centre O et d'angle $-90°$.
9. Rotation de centre O et d'angle $+180°$.
10. Rotation de centre O et d'angle $+30°$.
11. Rotation de centre O et d'angle θ.
12. Cisaillement : $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$.

Lesquelles parmis ces applications sont des similitudes ? Des isométries ?
Rappel : une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport. Les similitudes de rapport 1 sont des isométries. Par exemple, les rotations, les translations et les symétries sont des similitudes de rapport 1.

5 Geometrie dans l'espace

Exercice 26.

1. Écrire une équation de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $(4,7,1)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+2x+y^2-4y+z^2+1=0 \right\}$$

   est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 27. Déterminer si les triplets qui suivent forment des bases de l'espace. Lorsque c'est la cas, calculer le volume du parallélépipède correspondant.

1. $((0,0,0),(1,2,3),(0,1,1))$.
2. $((3,0,0),(2,2,0),(1,3,4))$.
3. $((1,1,1),(2,2,2),(0,0,1))$.
4. $((3,4,1),(2,2,0),(1,0,0))$.
5. $((1,0,1),(0,2,0),(2,7,2))$.
6. $((3,4,0),(2,2,0),(1,7,1)$.

Exercice 28.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((3,1,1),(15,5,6),(1,2,2))$ est une base.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+15y+z & = & a \\ x+5y+2z & = & b \\ x+6y+2z & = & c \end{array} \right. .$$

3. Écrire la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 29. Résoudre en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ les systèmes qui suivent. Vous donnerez la nature de l'ensemble des solutions.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 2z & = & 12 \end{array} \right. .$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 5y+z & = & 12 \end{array} \right. .$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 5y+z & = & 11 \end{array} \right. .$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+z & = & 7 \\ 3x+y+3z & = & 12 \end{array} \right. .$
5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+z & = & 7 \\ 3x+y+3z & = & 15 \end{array} \right. .$
6. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x+2y+2z & = & 8 \\ 3x+3y+3z & = & 12 \end{array} \right. .$

Exercice 30. Pour les droites et les plans qui suivent, donner une équation ou un système d'équations et les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{P}_1$ le plan passant par $(1,1,0)$ et de vecteur normal $(0,2,-3)$.
2. $\mathcal{P}_2$ le plan passant par $(3,0,1)$ et de vecteurs directeurs $(1,-1,-1)$ et $(1,2,1)$.
3. $\mathcal{P}_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 3 \right\}$.
4. $\mathcal{P}_4$ le plan d'équation $x - 4y = 8$.
5. $\mathcal{P}_5$ le plan d'équation $z = 3x - y + 5$.
6. $\mathcal{P}_6$ le plan passant par $(-1,2,0)$, $(0,1,1)$ et $(3,1,1)$.
7. $\mathcal{P}_7$ le plan médiateur du segment reliant $(0,0,2)$ et $(-4,8,4)$.
8. $\mathcal{P}_8 = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle \overrightarrow{OM}, u \rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0,0,0)$ et u le vecteur $(1,-1,1)$.
9. $\mathcal{P}_9 = \left\{ (1,4,1) + t_1(1,0,0) + t_2(1,1,1) \;\middle|\; (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
10. $\mathcal{P}_{10} = \left\{ (2 + 3t_1 + t_2, 4t_1, 3 - t_2) \;\middle|\; (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
11. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3,7,1)$ et de vecteur directeur $(1,-1,-1)$.
12. $\mathcal{D}_2 = \{ (1,0,4) + t\,(1,2,3) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
13. $\mathcal{D}_3 = \{ (2+3t, 4t, 4-t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
14. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1,0,1)$ et $(0,0,1)$.
15. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(1,0,0)$ et de vecteurs normaux $(1,0,-3)$ et $(0,1,0)$.
16. $\mathcal{D}_6 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 3 \text{ et } y = z + 2 \right\}$.
17. $\mathcal{D}_7$ la droite d'équations $x - 4y + z = 8$, $2x + 3y - z = 0$.
18. $\mathcal{D}_8$ la droite d'équations $y = 2x + 8$, $z = 3x + 5$.

Exercice 31. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan non parallèles.
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ s'intersectent en un unique point.

Exercice 32. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de l'espace passant par $A_2 = (1,0,2)$ et admettant $(1,3,0)$ et $(0,1,1)$ pour normales.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_2$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_2$.
2. Calculer la distance du point $M_2 = (5,3,4)$ à la droite $\mathcal{D}_2$.

Exercice 33. *Projection et symétrie orthogonales (plan).*
Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A et de vecteur normal u.
Soit M un point. On définit P par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} - \langle \frac{u}{\|u\|}, \overrightarrow{AM} \rangle \frac{u}{\|u\|}$.

1. Montrer que $P \in \mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{MP} \parallel u$.
2. Montrer que, pour tout $w \perp u$ non nul, $\|\overrightarrow{MP} + w\| > \|\overrightarrow{MP}\|$.
3. On définit M' par $\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM}$. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MP}$.

Exercice 34. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 4$.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance du point $M = (6, 6, 7)$ au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 35. *Procédé de Gram-Schmidt.* Soit $(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^3)^3$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe une base orthogonale (v_1, v_2, v_3) tel qu'il existe $(\mu_{1,2}, \mu_{1,3}, \mu_{2,3}) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v_1 = u_1$, $v_2 = \mu_{1,2}u_1 + u_2$ et $v_3 = \mu_{1,3}u_1 + \mu_{2,3}u_2 + u_3$.

Exercice 36. Calculer les angles entre les objets qui suivent.

1. Les vecteurs du plan $u_1 = (0, 1)$ et $v_1 = (3, -3)$.
2. Des droites du plan $\mathcal{D}_2$ et Δ_2 de vecteurs normaux $u_2 = (\sqrt{3}, -1)$ et $v_2 = (3, \sqrt{3})$.
3. Une droite de l'espace $\mathcal{D}_3$ de vecteur directeur $u_3 = (1, 0, 0)$ et le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $-6x + \sqrt{6}y + \sqrt{6}z = 3$.

Exercice 37. *Coordonnées cylindriques.* Soit $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^\star \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.
On note $e_1 = (1, 0, 0)$, puis x_r l'image de e_1 par l'homothétie de rapport r et de centre $(0, 0, 0)$, $x_{r,\theta}$ l'image de x_r par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par $(0, 0, 0)$ et dirigée par $(0, 0, 1)$, enfin $x_{r,\theta,z}$ l'image de $x_{r,\theta}$ par la translation de vecteur directeur $z(0, 0, 1)$.
Donner les coordonnées de $x_{r,\theta,z}$ et calculer $\|x_{r,\theta,z}\|$.

Exercice 38. *Coordonnées sphériques.* Soit $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^\star \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$.
On note $e_1 = (1, 0, 0)$, puis x_r l'image de e_1 par l'homothétie de rapport r et de centre $(0, 0, 0)$, $x_{r,\theta}$ l'image de x_r par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par $(0, 0, 0)$ et dirigée par $(0, 0, 1)$, enfin $x_{r,\theta,\varphi}$ l'image de $x_{r,\theta}$ par la rotation d'angle φ et d'axe passant par $(0, 0, 0)$ et dirigé par $x_{r,\theta} \wedge (0, 0, 1)$.
Donner les coordonnées de $x_{r,\theta,\varphi}$.

Exercice 39. Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$ non nul.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ non colinéaire à ω. Montrer que $(\omega, \omega \wedge u, \omega \wedge (\omega \wedge u))$ est une base orthogonale.
2. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$u \; = \; \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \frac{\omega}{\|\omega\|} \; - \; \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right).$$
3. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$\|u\|^2 \; = \; \left| \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \right|^2 \; + \; \left\| \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right) \right\|^2.$$
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,
$$u_\theta \; = \; -\cos(\theta) \, \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right) \; + \; \sin(\theta) \, \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \; + \; \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \frac{\omega}{\|\omega\|}$$
est l'image de u par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par l'origine $(0, 0, 0)$ et dirigée par ω. *Indication :* on pourra, pour traiter le cas u non colinéaire à ω, travailler dans une base adaptée.