Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math I Algèbre - PMI

Feuille d'exercices n° 4

NOMBRES COMPLEXES

---

1 Forme algébrique, forme trigonométrique

Exercice 1. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. Reécrire sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 2. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$. On définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 5. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 6. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. Montrer que l'application
$$f : D \to D, z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$
est une bijection telle que $f(C) = C$.

Exercice 7. Réduction de $a\cos x + b\sin x$.

1. Soit a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x-t)$$
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 8. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ainsi que $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

2 Equations, Racines carrées

Exercice 10. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 11. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 12. Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **2**. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$
3. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 14. On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.

Exercice 15. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

$a.$ $z^3 = -8i$, $b.$ $z^5 - z = 0$, $c.$ $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$,
$d.$ $z^2\bar{z}^7 = 1$, $e.$ $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 16. Résoudre l'équation $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et en déduire des expressions de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 17. Soit $w \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de 1. Montrer que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

Exercice 18. Soient $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$, $b = \cos(\frac{4\pi}{5})$, $s = a + b$ et $p = a \cdot b$.
En utilisant la formule d'Euler et l'exercice précédent, calculer s et p. En déduire les valeurs de a et b.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit w une racine n-ième de 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + w^k)^n$.
2. Calculer le produit et la somme des racines n-ièmes de 1.