Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math I Algèbre - PMI

Feuille d'exercices n° 3

DÉNOMBREMENT

---

1 Exemples de bijections

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ 3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x-y, 4x-2y) \end{cases}$ 4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 2. Soit :

$$\begin{array}{lcl} f & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & & n \mapsto 2n \end{array} \quad \text{et soit} \quad \begin{array}{lcl} g & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & & n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer fog et gof.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E. Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 5. Soit D l'ensemble de droites dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour des applications suivantes discuter leur injectivité et surjectivité sur un domain où elles sont bien définies.

1. une application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to D$ qui aux couples de points du plan $(x,y), (x',y')$ associe la droite qui passe par ces deux points.
2. une application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to D$ qui aux couples de points du plan $(x,y), (x',y')$ associe la droite perpendiculaire au segment reliant ces deux points.
3. une application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to D$ qui aux couples de points du plan $(x,y), (x',y')$ associe la droite qui passe par des points $(1,0)$ et $(0,1)$.
4. une application $\mathbb{R}^2 \to D$ qui à un vecteur $\overrightarrow{V} = (x,y)$ associe la droite passant par le point $(0,1)$ et parallèle à $\overrightarrow{V}$.
5. une application $\mathbb{R}^2 \to D$ qui à un point (x,y) du plan associe la droite passant par (x,y) et le point $(2x, 2y)$.

2 Dénombrement

Exercice 6. Soient E,F deux ensembles non vides. Soient A une partie de E, B une partie de F et f une application de E dans F. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si A est une partie finie de E, alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F, alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F, alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E, alors B est une partie finie de F.

Exercice 7. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de I_p dans I_n ?
3. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 8. Soit f une application de E vers F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 9. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'entiers $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$$(1)\ n_1 + n_2 \leq n, \qquad (2)\ n_1 + n_2 = n.$$

Mêmes questions pour les triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. Pouvez-vous généraliser aux cas des $m-$uplets ?
Indication : il est utile et instructif de représenter les couples (n_1, n_2) *dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *et, pour la deuxième partie, les triplets* (n_1, n_2, n_3) *dans l'espace* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque, et f une application de E dans F.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$.

Exercice 12. Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 1$. Notons F l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

1. Quel est le cardinal de F ?
2. Pour toute partie A de E, notons δ_A la fonction de E dans $\{0, 1\}$. définie par $\delta_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\delta_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit ϕ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans F qui à toute partie A de E associe δ_A. Montrer que ϕ est une application injective. En déduire que ϕ est bijective.

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x \in f(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\operatorname{Card} f(x) \geq 1$.
2. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\operatorname{Card} f(a) = n$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\operatorname{Card} f(x) \geq 2$.
3. Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que les ensembles $f(x)$ et $f(y)$ aient le même nombre d'éléments.

Exercice 14. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$? *Indication : pour chaque B compter les parties $A \subset B$.*

Exercice 15. Soient $k, n \in \mathbb{N}, k \leq m$.

1. Combien y a-t-il de listes strictement croissantes de k entiers parmi $1, 2, \cdots, n$?
2. En dénombrant les listes strictement croissantes de $k+1$ entiers parmi $1, 2, \cdots, n+1$ dont le dernier terme vaut successivement $k+1, k+2, \cdots, n+1$, montrer sans calcul que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice 16. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 17. Soit E un ensemble, avec $\operatorname{Card}(E) = n$. Démontrer que $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$,
– en utilisant les coefficients $\binom{n}{k}$;
– en raisonnant par récurrence sur n.

Exercice 18. Soient n et p des entiers naturels avec $1 \leq p \leq n-1$. Montrer que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Appliquer ce résultat au triangle de Pascal.

Exercice 19. Soient p, q, r des entiers naturels avec $r \leq p+q$. Montrer que :

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i} \binom{q}{r-i}.$$

Exercice 20. Soient p et n des entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Ecrire cette égalité pour $p = 2$, pour $p = 3$.
3. En déduire :

$$\begin{array}{ll} S_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n & ; \; S_3 = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)^2 \cdot n; \\ S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 & ; \; S_4 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3. \end{array}$$

Exercice 21. Soit E un ensemble avec $\mathrm{Card}(E) = n$.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subset B\}$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B$ équivaut à $A^C \cup B = E$.
3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$.

Exercice 22. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable à l'aide de l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

Exercice 23. On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{i+j}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$. *Indication : permuter les* Σ.

Exercice 24. Soit E un ensemble fini. Calculer $\displaystyle\sum_{A \subset E} |A|$, $\displaystyle\sum_{A,B \subset E} |A \cap B|$, $\displaystyle\sum_{A,B \subset E} |A \cup B|$.
Indication : Ecrire $|A| = \sum_{x \in E} \delta_A(x)$, *où* $\delta_A(x)$ *vaut* 1 *si* $x \in A$ *et* 0 *sinon.*