Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Mathématiques III PMI 12 octobre 2020. Durée : 1 h 30

Devoir n^o 2 — corrigé de l'analyse

Exercice 1

1. On a immédiatement $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, par théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ est convergente. Autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Effectuons un développement limité de v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n^2\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-1 + o(1)\right). \end{aligned}$$

Cela montre que $v_n \to e^{-1} \neq 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est (grossièrement) divergente.

3. Remarquons que $w_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. En outre :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Or, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1))$. Cela montre que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \to e^{-1}$ et comme $e^{-1} < 1$, la règle de D'Alembert permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$ est convergente.

Exercice 2

1. Par croissance de la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \sqrt{x}$, on a déjà

$$\sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{k+1}$$

pour tout $k \geqslant 1$. L'inégalité de droite, écrite en remplaçant k par $k-1$, donne $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{k}$, et on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Considérons maintenant un entier $n \geqslant 1$ et sommons l'encadrement précédent pour k allant de 1 à n :

$$\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or, on calcule directement $\displaystyle\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{3/2}$, et de même $\displaystyle\int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1)$. Cela montre que

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\frac{2}{3}n^{3/2}} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} - \frac{1}{n^{3/2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Le membre de droite tend vers 1 quand $n \to +\infty$, donc par théorème d'encadrement, on a $\dfrac{u_n}{\frac{2}{3}n^{3/2}} \to 1$. Autrement dit,

$$u_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

2. On a donc $v_n \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-3/2}}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est donc de même nature que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha-3/2}}$. Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - \frac{3}{2} > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > \frac{5}{2}$.

Exercice 3

1. On factorise par n^2 dans la racine puis on effectue le développement de la racine :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+an+1} &= n\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}\\ &= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= n\left(1+\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{a^2}{8n^2}-\frac{a}{4n^3}+\frac{a^3}{16n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).\end{aligned}$$

En distribuant n et en regroupant les termes, on obtient bien

$$\sqrt{n^2+an+1} = n+\frac{a}{2}+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

avec $A = \frac{4-a^2}{8}$ et $B = \frac{a^3-4a}{16}$.

2. En utilisant la propriété que $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$ pour tout réel x, on a

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+an+1}) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi A}{n}+\frac{\pi B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\sin\frac{\pi a}{2}|.$$

Si a n'est pas un entier pair, alors $\sin\frac{\pi a}{2} \neq 0$ et donc $u_n \not\to 0$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc grossièrement divergente.

3. (a) Si on a maintenant $a = 2a'$, avec $a' \in \mathbf{Z}$, alors, en reprenant le calcul fait dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}u_n &= (-1)^n \sin\left(\pi a'+\frac{\pi A}{n}+\frac{\pi B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^n(-1)^{a'}\sin\left(\frac{\pi A}{n}+\frac{\pi B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^n(-1)^{a'}\left(\frac{\pi A}{n}+\frac{\pi B}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= A'\frac{(-1)^n}{n}+B'\frac{(-1)^n}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

où $A' = (-1)^{a'}\pi A$ et $B' = (-1)^{a'}\pi B$. Remarquez que A' et B' ne dépendent pas de n.

3. (b) On a donc $u_n = A'\frac{(-1)^n}{n} + B'\frac{(-1)^n}{n^2} + u'_n$, où $u'_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or,

- la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente car elle vérifie le critère des séries alternées : la suite des $(-1)^n/n$ est bien à signes alternés, et la suite des $1/n$ est décroissante et tend vers 0 ;
- la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente ;
- puisque $|u'_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs indique que la série $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ est absolument convergente, donc convergente.

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc combinaison linéaire de trois séries convergentes, et est par conséquent convergente.