Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Mathématiques III PMI 9 Décembre 2019. Durée : 1 h 30

Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Soit

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ et que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2x(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Montrer que les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$ et que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
4. f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction donnée par $f(t) = (\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que $g \circ f$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g \circ f)'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{n \sin x}{n+x} \end{array}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. a. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;\pi]$.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx$.
   c. Retrouver le résultat de b. en utilisant le théorème de convergence dominée.
3. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$?

Correction Partie Analyse

Exercice 1

1. f est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions polynômiales donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec le dénominateur non nul sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Donc les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et on a pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x(x^2+y^2) - 2y(xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2x(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. a. Existence des dérivées partielles en $(0,0)$?

On a pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

Et de même, tout $t \neq 0$,

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

On a donc montré que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b. Pour montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, reste à voir si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

i) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Cherchons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si elle existe.

1ère méthode : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$0 \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| = \frac{|y|^3|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$ par définition de $(x,y) \to (0,0)$. On a utilisé le fait que $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.

D'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

2ème méthode (Passage aux coordonnées polaires) : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ càd $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, on a

$$0 \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| = \frac{r^5|\sin^3\theta||\sin^2\theta - \cos^2\theta|}{r^4} \leq r \to 0$$

quand $r \to 0$. On a utilisé le fait que $|\sin\theta| \leq 1$ et par l'inégalité triangulaire $|\sin^2\theta - \cos^2\theta| \leq \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ou $|\sin^2\theta - \cos^2\theta| = |-\cos(2\theta)| \leq 1$.

D'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

ii) On a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Cherchons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si elle existe.

1ère méthode : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$0 \leq |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| = \frac{y^2|x|(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(3y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$ par définition de $(x,y) \to (0,0)$. On a utilisé le fait que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. D'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

2ème méthode (Passage aux coordonnées polaires) : A faire

Par suite f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. i) Soit $t \neq 0$, on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \frac{t-0}{t} = 1 \underset{t\to 0}{\to} 1.$$

On déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existe en $(0,0)$ et vaut 1 .

ii) Soit $t \neq 0$, on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

On déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe en $(0,0)$ et vaut 0 .

4. Notons que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, on déduit du Théorème de Schwarz que f n'est pas C^2 sur tout ouvert contenant $(0,0)$ et par suite f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1. La fonction $f = (f_1, f_2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ car ses composantes f_1, f_2 le sont : quotient de fonctions polynômiales avec le dénominateur qui ne s'annule pas, donc sont C^1 sur $\mathbb{R}$. Et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(t) = \frac{2t(1+t^2) - 2t(t^2-1)}{(1+t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

$$f_2'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Comme $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à $(x,y) \mapsto g(x,y)$ est aussi par hypothèse une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors $h = g \circ f$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculons $h'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1ère méthode : Règle de dérivation en chaîne

D'après la règle de dérivation en chaîne on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(t))f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t))f_2'(t) \\ &= \frac{4t}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}). \end{aligned}$$

2ème méthode : Matrice Jacobienne

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $J_h(t) = J_g(f(t))J_f(t)$ avec

$$J_g(f(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \end{pmatrix}$$

et

$$J_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{4t}{(1+t^2)^2} & \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$J_h(t) = \begin{pmatrix} \frac{4t}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \end{pmatrix}$$

On déduit donc que

$$f'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. On a g est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   D'après 1., on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(t) &= \frac{4t}{(1+t^2)^2}2\frac{t^2-1}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\frac{4t}{1+t^2}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Par suite $g \circ f$ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1,0) = 1$, on a alors $(g \circ f)(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Convergence simple de $(f_n)_n$.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. On a

$$f_n(x_0) = \frac{n \sin x_0}{n(1+\frac{x_0}{n})} = \frac{\sin x_0}{1+\frac{x_0}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \sin x_0.$$

   Par suite la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a. Convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,\pi]$: On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n \sin x}{n+x} - \sin x\right| = \left|\frac{-x \sin x}{n+x}\right| = \frac{x \sin x}{n+x} \leq \frac{\pi}{n} \tag{1}$$

   où on a utilisé le fait que $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $0 \leq x \leq \pi$ (en particulier $\sin x \geq 0$). On déduit de (1) que
   i) $f_n - f$ est bornée pour tout $n \geq 1$ (par $\frac{\pi}{n}$ ou π)
   ii) $0 \leq \sup\limits_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
   et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
   Par suite, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$.

   b. On a
   i) f_n continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{n}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \geq 1$.
   ii) D'après 2.a., $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur le segment $[0,\pi]$.
   Par suite, d'après le cours

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx = \int_0^\pi f(x)dx.$$

   On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx &= \int_0^\pi \sin x\, dx \\ &= [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= 1+1 \\ &= 2\end{aligned}$$

c. On a

i) f_n continue sur $[0,\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) D'après 1., $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0,\pi]$ avec f continue sur $[0,\pi]$.

iii) Comme sinus est positive sur $[0,\pi]$, on a $|f_n(x)| = \frac{\sin x}{n+x} \leq \sin x = f(x)$ pour tout $x \in [0,\pi]$ avec sinus continue sur $[0,\pi]$ et donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$ (on a vu dans 2.b. que $\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$).

Par suite d'après le Théorème de convergence dominée, f_n et f sont intégrables (on le savait) et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx = \int_0^\pi f(x)dx = 2$$

d'après le même calcul dans 2.b.

3. Prenons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \in [0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{x_n \sin x_n}{n + x_n}\right| &= \frac{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}{n + \frac{\pi}{2} + 2n\pi} \\ &= \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{n(1+2\pi) + \frac{\pi}{2}} \\ &\sim_{+\infty} \frac{2\pi}{1+2\pi} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{1+2\pi} \neq 0 \end{aligned}$$

Comme $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \ .$$

Par suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.