

Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

PARTIE ANALYSE

**Exercice 1.** Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) ; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2x(y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2. Montrer que les dérivées partielles de  $f$  existent en  $(0, 0)$  et que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Justifier l'existence et calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ .
4.  $f$  est-elle  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction donnée par  $f(t) = (\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$  et soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Montrer que  $g \circ f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $(g \circ f)'(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{n \sin x}{n+x}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. a. Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[0; \pi]$ .  
 b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx$ .  
 c. Retrouver le résultat de b. en utilisant le théorème de convergence dominée.
3. La suite  $(f_n)_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; +\infty[$  ?

**Exercice 1**

1.  $f$  est  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  car quotient de deux fonctions polynômiales donc  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  avec le dénominateur non nul sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Donc les dérivées partielles de  $f$  existent en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et on a pour tout  $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2 + y^2) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x(x^2 + y^2) - 2y(xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2x(y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2. a. Existence des dérivées partielles en  $(0,0)$  ?

On a pour tout  $t \neq 0$ ,

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Par suite  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  existe et vaut 0.

Et de même, tout  $t \neq 0$ ,

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Par suite  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  existe et vaut 0.

On a donc montré que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

- b. Pour montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , reste à voir si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0,0)$ .

- i) On a  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ . Cherchons  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  si elle existe.

**1ère méthode :** Pour tout  $(x,y) \neq (0,0)$ , on a

$$0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \frac{|y|^3|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

quand  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  par définition de  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . On a utilisé le fait que  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  et l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{R}$ .

D'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0,0)$ .

**2ème méthode (Passage aux coordonnées polaires) :** Pour tout  $(x,y) \neq (0,0)$  càd  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $0 \leq \theta < 2\pi$ , on a

$$0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \frac{r^5 |\sin^3 \theta| |\sin^2 \theta - \cos^2 \theta|}{r^4} \leq r \rightarrow 0$$

quand  $r \rightarrow 0$ . On a utilisé le fait que  $|\sin \theta| \leq 1$  et par l'inégalité triangulaire  $|\sin^2 \theta - \cos^2 \theta| \leq \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  ou  $|\sin^2 \theta - \cos^2 \theta| = |-\cos(2\theta)| \leq 1$ .

D'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0,0)$ .

ii) On a  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ . Cherchons  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  si elle existe.

**1ère méthode :** Pour tout  $(x,y) \neq (0,0)$ , on a

$$0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \frac{y^2|x|(y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}(3y^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

quand  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  par définition de  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . On a utilisé le fait que  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ . D'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0,0)$ .

**2ème méthode (Passage aux coordonnées polaires) :** A faire

Par suite  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

3. i) Soit  $t \neq 0$ , on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \frac{t-0}{t} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1.$$

On déduit que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  existe en  $(0,0)$  et vaut 1.

ii) Soit  $t \neq 0$ , on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

On déduit que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  existe en  $(0,0)$  et vaut 0.

4. Notons que  $f$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Comme  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , on déduit du Théorème de Schwarz que  $f$  n'est pas  $C^2$  sur tout ouvert contenant  $(0,0)$  et par suite  $f$  n'est pas  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2** La fonction  $f = (f_1, f_2)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  car ses composantes  $f_1, f_2$  le sont : quotient de fonctions polynômiales avec le dénominateur qui ne s'annule pas, donc sont  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Et on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f_1'(t) = \frac{2t(1+t^2) - 2t(t^2-1)}{(1+t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

$$f_2'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Comme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $(x,y) \mapsto g(x,y)$  est aussi par hypothèse une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  alors  $h = g \circ f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Calculons  $h'(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**1ère méthode : Règle de dérivation en chaîne**

D'après la règle de dérivation en chaîne on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(t))f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t))f_2'(t) \\ &= \frac{4t}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right). \end{aligned}$$

**2ème méthode : Matrice Jacobienne**

On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $J_h(t) = J_g(f(t))J_f(t)$  avec

$$J_g(f(t)) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \quad \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \right)$$

et

$$J_f(t) = \left( \frac{4t}{(1+t^2)^2} \quad \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)$$

Par suite,

$$J_h(t) = \left( \frac{4t}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial x} \left( \frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial y} \left( \frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \right)$$

On déduit donc que

$$f'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial x} \left( \frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) + \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \frac{\partial g}{\partial y} \left( \frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 3

1. Convergence simple de  $(f_n)_n$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^+$ . On a

$$f_n(x_0) = \frac{n \sin x_0}{n(1 + \frac{x_0}{n})} = \frac{\sin x_0}{1 + \frac{x_0}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin x_0.$$

Par suite la suite  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x) = \sin x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

2. a. Convergence uniforme de  $(f_n)_n$  sur  $[0, \pi]$  : On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n \sin x}{n+x} - \sin x \right| = \left| \frac{-x \sin x}{n+x} \right| = \frac{x \sin x}{n+x} \leq \frac{\pi}{n} \quad (1)$$

où on a utilisé le fait que  $|\sin x| \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et que  $0 \leq x \leq \pi$  (en particulier  $\sin x \geq 0$ ). On déduit de (1) que

i)  $f_n - f$  est bornée pour tout  $n \geq 1$  ( par  $\frac{\pi}{n}$  ou  $\pi$ )

ii)  $0 \leq \sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

Par suite,  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, \pi]$ .

b. On a

i)  $f_n$  continue sur  $[0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  car sinus est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $x \mapsto \frac{n}{n+x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $n \geq 1$ .

ii) D'après 2.a.,  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur le segment  $[0, \pi]$ .

Par suite, d'après le cours

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx &= \int_0^\pi \sin x dx \\ &= [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

c. On a

i)  $f_n$  continue sur  $[0, \pi]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

ii) D'après 1.,  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $[0, \pi]$  avec  $f$  continue sur  $[0, \pi]$ .

iii) Comme sinus est positive sur  $[0, \pi]$ , on a  $|f_n(x)| = \frac{\sin x}{n+x} \leq \sin x = f(x)$  pour tout  $x \in [0, \pi]$  avec sinus continue sur  $[0, \pi]$  et donc intégrable sur le segment  $[0, \pi]$  (on a vu dans 2.b. que  $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ ).

Par suite d'après le Théorème de convergence dominée,  $f_n$  et  $f$  sont intégrables (on le savait) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx = 2$$

d'après le même calcul dans 2.b.

3. Prenons pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \in [0, +\infty[$  pour tout  $n \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_n)| &= \left| \frac{x_n \sin x_n}{n + x_n} \right| = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}{n + \frac{\pi}{2} + 2n\pi} \\ &= \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{n(1 + 2\pi) + \frac{\pi}{2}} \\ &\sim_{+\infty} \frac{2\pi}{1 + 2\pi} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{1 + 2\pi} \neq 0 \end{aligned}$$

Comme  $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$  pour tout  $n \geq 1$ , on déduit que

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x) - f(x)| \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Par suite  $(f_n)_n$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .