Théorème 2.9. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

Démonstration. Notons $A = (a_{ij}) = (a_1 \ \cdots \ a_n)$, $B = (b_{ij}) = (b_1 \ \cdots \ b_n)$, $C = AB = (c_{ij}) = (c_1 \ \cdots \ c_n)$ de sorte que $c_{ik} = \sum j = 1^n = a_{ij}b_{jk}$. On a alors

$$c_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{jk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \cdot a_j.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(c_1 \ \cdots \ c_n) \\
&= \det(\sum_{j=1}^n b_{j1} \cdot a_j \quad \sum_{j=1}^n b_{j2} \cdot a_j \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^n b_{jn} \cdot a_j) \\
&= \det(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} \cdot a_{i_1} \quad \sum_{i_2=1}^n b_{i_2,2} \cdot a_{i_2} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} \cdot a_{i_n}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n} b_{i_1,1} \times \cdots \times b_{i_n,n} \cdot \det(a_{i_1} \ \cdots \ a_{i_n}).
\end{aligned}$$

Dans cette somme, dès que deux i_j sont égaux, on obtient deux colonnes égales et le terme disparaît. Il ne reste que les termes où $i_1, \ldots, i_n$ sont distincts deux à deux. Autrement dit les termes pour lesquelles $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On note alors $i_1 = \sigma(1) \ldots, i_n = \sigma(n)$ et on peut réécrire

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} \times \cdots \times b_{\sigma(n),n} \cdot \det(a_{\sigma(1)} \ \cdots \ a_{\sigma(n)}) \\
&= \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \times \cdots \times b_{\sigma(n),n} \Big) \cdot \det(a_1 \ \cdots \ a_n) \\
&= \det(B) \times \det(A).
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.10. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ est inversible.}$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Soit B l'inverse de A alors $AB = \mathrm{I_n}$ et $1 = \det(\mathrm{I_n}) = \det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$ d'où $\det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$: Par contraposée, on suppose A non inversible donc les colonnes C_i de A sont liées. Quitte à faire un échange de colonnes, on peut supposer que $C_1 = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Par conséquent $\det(A) = \det(\sum_2^n \lambda_i C_i \ \ C_2 \ \cdots \ C_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \det(C_i \ C_2 \ \cdots \ C_n) = 0$.

□

Proposition 2.11. Si A est une matrice inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2.2 Calcul pratique du déterminant

Proposition 2.12. 1. Le déterminant est est opposé si on échange deux lignes ou deux colonnes.

2. Si on remplace une colonne C (resp. une ligne L) par $C +$ "une combinaison linéaire des autres" (resp. $L + \cdots$) alors le déterminant ne change pas.

Démonstration. 1. Déjà vu pour les colonnes et l'égalité $\det(A) = \det({}^tA)$ l'implique pour les lignes.

2. Faisons la preuve pour $C = C_1$. Alors

$$\det(C_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i C_i \;\; C_2 \; \cdots \; C_n) = \det(C_1 \; C_2 \; \cdots \; C_n) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(C_i \; C_2 \; \cdots \; C_n) = \det(C_1 \; C_2 \; \cdots \; C_n).$$

$\square$

Lemme 2.13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ avec le 1 à la ligne k. Alors

$$\det(A) = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On commence par le cas $k = 1$. Tout d'abord, soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(1) = 1$. Soit $\tau \in S_{n-1} = S(\{1, \ldots, n-1\})$ définie par $\tau(i) = \sigma(i+1) - 1$. Montrons que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$. On a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{(\sigma(j+1) - 1) - (\sigma(i+1) - 1)}{(j+1) - (i+1)} \\
&= \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \prod_{2 \leq q \leq n} \frac{\sigma(q) - \sigma(1)}{q - 1} \times \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \varepsilon(\sigma).
\end{aligned}$$

Dans la suite on notera τ_σ une telle application associée à $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(1) = 1$.

Soit $B = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$. Notons b_{ij} ses coefficients de sorte que $b_{ij} = a_{i+1,j+1}$.

Montrons que $\det(A) = \det(B)$ ce qui montrera bien que $\det(A) = (-1)^{k+1}\det(B)$ dans le cas $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n-1} a_{\sigma(i+1),i+1} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n-1} a_{\tau(i)+1,i+1} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\tau_\sigma)\prod_{i=1}^{n-1} b_{\tau(i),i} \\
&= \sum_{\tau\in S_{n-1}} \varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n-1} b_{\tau(i),i} \\
&= \det(B).
\end{aligned}$$

Traitons le cas où $k \geq 2$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & L_k \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_n \end{pmatrix}.$$

Autrement la ligne k de A est constituée d'un 1 puis d'autres coefficients regroupés dans la notation L_k. Les autres lignes ont un 0 puis d'autres termes qu'on regroupe dans L_i. Ainsi L_i contient $n-1$ coefficients. Dans une matrice, un échange de deux lignes provoque un signe moins sur le déterminant. On considère la permutation (le cycle) $\tau = (i \quad k-1 \ \cdots \ 1)$. On peut le décomposer ainsi : $\tau = (k\ k-1)(k-1\ k-2)\cdots(3\ 2)(2\ 1)$. Il contient $k-1$ transpositions donc $\varepsilon(\tau) = (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

On obtient alors $\det(A) = (-1)^{k+1}\det\begin{pmatrix} 1 & L_k \\ 0 & L_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_{k-1} \\ 0 & L_{k+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_n \end{pmatrix}$. Ensuite on applique le cas $k = 1$ et on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}. \qquad \square$$

Remarque 2.14. Grâce à la transposition, on a un résultat similaire avec les lignes.

Définition 2.15. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $r \in \{1,\dots,n\}$. Soient $i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_r \in \{1,\dots,n\}$ tels que les i_k soient distincts deux à deux et les j_k également. Soit $B \in M_r(\mathbb{K})$ obtenue en posant $B = (a_{i_l,j_k})_{1\leq l,k\leq r}$. Le déterminant d'une telle matrice B est appelée un mineur d'ordre r de la matrice A.

Définition 2.16. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Notons e_{ij} le mineur d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On note $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times e_{ij}$. Ce nombre A_{ij} est appelé cofacteur d'indice (i, j).
La matrice dont les coefficients sont les A_{ij} est appelée comatrice de A et notée com(A).

Exemple 2.17. Faire un exemple avec une matrice 3×3 en énumérant tous les mineurs et un exemple plus grand.

Lemme 2.18. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$. On a l'équivalence :
$\mathrm{rg}(A) \geq r \iff$ il existe un mineur de A d'ordre r qui est non nul.

Démonstration. Montrons l'implication "$\Rightarrow$". Par hypothèse, il existe une famille de (au moins) r colonnes qui est libre. Formons la matrice constituée de r de ces colonnes ; B est donc une matrice de $M_{n \times r}(\mathbb{K})$. On sait que B et ${}^tB$ ont le même rang, à savoir r. Donc il existe dans B, r lignes qui forment une famille libre. Notons C la matrice formée de ces lignes. Cette matrice est une matrice carré de taille r et elle est de rang r, i.e. elle est inversible, autrement de déterminant non nul. Or ce déterminant est un mineur d'ordre r issu de A d'où la conclusion.
Montrons l'implication "$\Leftarrow$". Quitte à échanger des lignes et des colonnes de A, on peut supposer que le mineur qu'on obtient en prenant la déterminant de $C = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$ est non nul. Dans cette matrice C, en particulier, les lignes sont linéairement indépendantes. Notons B la matrice formée des r premières colonnes de A (B contient C comme sous-matrice). Les r premières lignes de B sont les lignes de C et elles sont libre donc le rang de B est au moins r. Mais comme B est de taille $n \times r$, son rang n'excède pas r. Par conséquence, le rang de B est r ce qui signifie que les r premières colonnes de A forment une famille libre et donc A est de rang $\geq r$. □

Corollaire 2.19. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$. On a l'équivalence suivante : A est de rang r si et s. si $\big($il existe un mineur d'ordre r non nul et tous les mineurs d'ordres $> r$ sont nuls$\big)$.

Démonstration. Facile. □

Dans le théorème qui suit, il s'agit du développement du déterminant par rapport à la colonne j ou la ligne i.

Théorème 2.20. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On rappelle qu'on note A_{ij} le cofacteur obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.
Pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Démonstration. On fait la preuve uniquement pour la première formule. On fixe donc $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, notons B_{ij} la matrice où, dans A, on remplace la colonne j par la colonne formée de 0 sauf un 1 à la ligne i. Par multilinéarité du déterminant suivant les colonnes, on obtient

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \det(B_{ij}).$$

Pour chaque B_{ij}, on applique la permutation $\tau = (j\ j-1)(j-1\ j-2)\cdots(3\ 2)(2\ 1)$ aux colonnes et on se retrouve avec une matrice dans laquelle l'ancienne colonne j est en position 1. Notons B'_{ij} cette matrice. On a alors $\det(B_{ij}) = \varepsilon(\tau)\det(B'_{ij}) = (-1)^{j+1}$. Notons $C_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ le mineur obtenu de A en supprimant la ligne i et la colonne j. Le lemme 2.13 implique que $\det(B'_{ij}) = (-1)^{i+1}\det(C_{ij})$. Finalement $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$. $\square$