Feuille d'exercices n° 7 : Projecteurs spectraux, suites linéaires, équations différentielles à coefficients constants

1 Projecteurs spectraux, puissances, exponentielles

Exercice 1. Deux formules plus ou moins dans le cours.
Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, et soient $\pi_1, \dots, \pi_p$ les projecteurs spectraux associés. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des scalaires. Soit $k \geq 0$ un entier naturel et t un réel. Montrer les formules :

$$(\alpha_1 \pi_1 + \cdots + \alpha_p \pi_p)^k = \alpha_1^k \pi_1 + \cdots + \alpha_p^k \pi_p.$$
$$e^{t(\alpha_1 \pi_1 + \cdots + \alpha_p \pi_p)} = e^{\alpha_1 t} \pi_1 + \cdots + e^{\alpha_p t} \pi_p.$$

Exercice 2. Pour chacune des matrices M ci-dessous, déterminer le polynôme minimal m_M, puis écrire la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction $1/m_M$ et un nombre raisonnable de coefficients de celle-ci, puis en déduire les projecteurs spectraux comme polynômes en M. Écrire ensuite la décomposition de Dunford-Schwarz (comme somme de deux polynômes en M), puis une expression des puissances positives M^k et enfin de $\exp(tM)$ en fonction des projecteurs spectraux et de M.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. Diagonaliser A.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible. Dans le cas où A est inversible, déterminer son inverse.
4. Calculer A^n pour tout entier n.
5. Calculer e^{tA} pour tout réel t.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}$, où les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de u et en déduire que le spectre de u a un et un seul élément.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t.

Exercice 5. Soient E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u - (1-a)\,\mathrm{id}_E$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de u.
2. Si $a = 0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.
   Déterminer toutes les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.
5. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(u - (1-a)\,\mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(u - (1+3a)\,\mathrm{id}_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
6. Exprimer en fonction de u les projections de E sur les sous-espaces E_1 et E_2.
7. Exprimer les endomorphismes u^k pour tout entier $k \geq 1$, et e^u en fonction de ces projections et en déduire leurs matrices dans la base canonique.

2 Suites récurrentes linéaires

Exercice 6. Résoudre à la main le système linaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1}. \end{cases}$$

Exercice 7. 1. La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ si $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice A telle que pour tout $n \geq 2$ on ait $X_n = AX_{n-1}$. Utiliser alors le calcul des puissances de A pour en déduire une expression non récurrente de u_n.

2. On s'intéresse aux suites réelles (v_n) vérifiant pour tout $n \geq 2$ la relation de récurrence : $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} - 3$. Donner un exemple très simple de suite vérifiant cette relation puis, en utilisant la matrice A de la première question, déterminez-les toutes.

3 Exemples simples d'exponentielles

Exercice 8. Calculer à la main l'exponentielle de chacune des matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}.$$

4 Résolution de systèmes différentiels

NB : Dans les trois exercices qui suivent, on réutilisera les calculs de l'exercice 2.

Exercice 9. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 10y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t). \end{cases}$$

Exercice 10. Déterminer toutes les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 9y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

qui vérifient $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

Exercice 11. Résoudre le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = CX(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

et on note, pour tout t réel, $X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Expliciter un système linéaire vérifié par la fonction X et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle : $y''' + y'' - y' - y = 0$, puis l'équation différentielle : $y''' + y'' - y' - y = \cos t$.

Exercice 14. Montrer comment la résolution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y''(t) = -x(t) - y(t) + y'(t) \end{cases}$$

peut être ramenée à celle d'un système linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exercice 15. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Soit X_0 un vecteur propre de A pour lequel on note α la valeur propre associée. Déterminer la solution X du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ qui vérifie la condition initiale $X(0) = X_0$.

Exercice 16. Pour chacune des matrices A suivantes, tracer dans le plan les ensembles images de quelques unes des solutions X du système $X' = AX$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$