Université Claude Bernard - Lyon 1 Automne 2020-2021
Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 6
POLYNÔMES ANNULATEURS ET POLYNÔME MINIMAL

Exercice 1. Soit P un polynôme annulateur d'un endomorphisme $f : E \to E$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.
2. Montrer que si f vérifie $f^3 + 2f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$ alors f est bijectif. Analyser les cas $\dim E$ finie et infinie.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme défini par $T(P) = P(1-X)$. Vérifier que $T^2 = \mathrm{Id}$, puis déterminer les valeurs propres de T.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E. On pourra supposer que $P'(0) = 1$.

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose connus $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement. Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.

Exercice 5. Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Soient $B, C \in \mathbb{K}[A]$. Montrer que $BC \in \mathbb{K}[A]$ et que $BC = CB$.
2. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $d = \deg m_A$. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est libre, puis, à l'aide d'une division euclidienne, qu'elle engendre $\mathbb{K}[A]$. En déduire la dimension de $\mathbb{K}[A]$.

Exercice 7. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et p un entier naturel non nul tels que $B = A^p$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Exercice 8. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note P_M son polynôme caractéristique et m_M son polynôme minimal. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?
"Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$...

1. $P_{A-\alpha I_n} = P_A(X - \alpha)$";
2. $P_{A-\alpha I_n} = P_A(X + \alpha)$";
3. $m_{A-\alpha I_n} = m_A(X - \alpha)$";
4. $m_{A-\alpha I_n} = m_A(X + \alpha)$".

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u = X^n$. Comment procéder à l'aide du polynôme minimal ? Montrer que le résultat est encore vrai si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une certaine base B est triangulaire avec une diagonale nulle, est nilpotente de degré $p \leq n$.

On rappelle que le degré de nilpotence de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

Exercice 11. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que u est linéaire. Déterminer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E où l'on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être une valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est premier avec le polynôme minimal m_u de u si et seulement si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.

Exercice 14. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u à F (considérée comme un endomorphisme de F) est diagonalisable.

Exercice 15. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Notons m_F et m_G les polynômes minimaux respectifs des restrictions de u à F et G. Montrer que le polynôme minimal de u est égal à $\mathrm{ppcm}(m_F, m_G)$.

Exercice 16.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout p dans $\{1, \dots, n\}$.
   (b) En déduire que J est diagonalisable.
   (c) Montrer que $I_n, J, \dots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.
   (d) Déterminer le polynôme minimal de J, puis calculer les valeurs propres de J.
   (e) Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme polynôme en la matrice J.
   (b) Montrer que pour tout polynôme complexe Q, $Q(J)$ est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$.
   (c) En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
   (d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^3 = M$.

Exercice 18. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(\star) \qquad M^3 + M = 0.$$

Soit M non nulle satisfaisant $(\star)$. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id})$.
2. Déterminer le polynôme minimal de u.
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartient pas au noyau de u alors $(x, u(x))$ est libre.
4. Montrer que $\dim \ker(u) = 1$. En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 19.

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.
   (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que si A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, alors elles sont semblables.
2. Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer leur rang, leur polynôme caractéristique et leur polynôme minimal. Sont-elles semblables ?
3. (difficile) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal sont-elles semblables ?

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

1. Soit u un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question précédente.
   (b) En déduire que pour tout polynôme unitaire $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, il existe un endomorphisme cyclique u de E dont le polynôme caractéristique est Q.
3. Soit u un endomorphisme cyclique. Montrer que le polynôme minimal de u est égal à son polynôme caractéristique.