

**Feuille d'exercices n° 1 : révisions d'algèbre linéaire**

**I. Espaces vectoriels – Bases**

**Exercice 1.** Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Montrer que  $F \cap G = F + G$  si et seulement si  $F = G$ .
2. Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 2.**

1. Soit  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Montrer que  $H$  et  $\text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Soient  $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 3.**

1. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Montrer que si  $\dim F + \dim G > n$ , alors  $F \cap G$  contient un vecteur non nul.
2. Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les vecteurs  $u = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v = (0, 1, -1, 0)$ ,  $w = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x = (0, 0, 1, 0)$  et  $y = (1, 1, 0, -1)$ . Soit  $F = \text{Vect}(u, v, w)$  et  $G = \text{Vect}(x, y)$ . Quelles sont les dimensions de  $F, G, F + G$  et  $F \cap G$ ?

**Exercice 4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

1. On pose  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_2 + e_3$  et  $f_3 = e_3 + e_1$ . Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est libre.

2. On pose  $g_1 = e_1 + e_2$ ,  $g_2 = e_2 + e_3$ ,  $g_3 = e_3 + e_4$  et  $g_4 = e_4 + e_1$ . Montrer que la famille  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  n'est pas libre.
3. On pose  $h_1 = e_1 + e_2$ ,  $h_2 = e_2 + e_3, \dots, h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$  et  $h_n = e_n + e_1$ . La famille de vecteurs  $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n)$  est-elle libre?

**Exercice 5.** On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^5$  :  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre.
2. Soit  $v \in \mathbb{R}^5$ . À quelle condition  $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ ?
3. Trouver un supplémentaire de  $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

**II. Applications linéaires – Théorème du rang**

**Exercice 6.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $u$  :

$$u : \begin{matrix} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{matrix}$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

**Exercice 7.** Pour chacune des applications qui suit, dire (en le justifiant) si elle est linéaire ou non :

1.  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2PP' \end{matrix}$ , où  $P'$  désigne le polynôme dérivé de  $P$ .
2.  $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par " $f(P)$  est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^4 - 5X + 2$ ".

**Exercice 8.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$  et que  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ .
2. (a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$  si et seulement si  $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ .

- (b) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$  si et seulement si  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ .
  - (c) Montrer que  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$  si et seulement si  $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$ .
3. (a) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant les propriétés du 2.
- (b) Les équivalences sont-elles encore vraies en dimension infinie ?

**Exercice 9.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^n(x_0))$  forme une base de  $E$ .

1. Montrer que  $u$  est bijective.
2. Montrer qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *nilpotent* s'il existe un entier naturel  $p$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . On dira que  $u$  est *ponctuellement nilpotent* si, pour tout  $x \in E$ , il existe un entier naturel  $p$  (qui dépend de  $x$ ) tel que  $u^p(x) = 0_E$ .

1. Démontrer que tout endomorphisme nilpotent est ponctuellement nilpotent.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si  $E$  est de dimension finie.
3. Donner un exemple d'endomorphisme ponctuellement nilpotent non nilpotent.
4. On suppose  $E$  de dimension finie  $n$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent. Démontrer que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

*Indication :* soit  $p$  le plus petit entier strictement positif tel que  $u^p = 0$ , montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que la famille  $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.

**Exercice 11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$  si et seulement si la dimension de  $E$  est paire.

### III. Matrices – Changements de base

**Exercice 12.** On considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par :

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP'$$

pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

1. Écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de  $u$ .

**Exercice 13.** On note  $S(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = {}^tA\}$  l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$  et  $A(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = -{}^tA\}$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que  $S(n)$  et  $A(n)$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Calculer la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
3. On considère l'endomorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  défini par  $\phi(A) = {}^tA$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer la trace de  $\phi$ .

**Exercice 14.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix},$$

et soient  $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = 2x\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$ .

1. Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , en donner une base et la dimension.
2. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ .
3. Soit  $e_1$  un vecteur directeur de  $E$  et  $(e_2, e_3)$  une base de  $F$ . Calculer la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .

**Exercice 15.**

1. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont la même trace.
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que toutes les matrices de  $u$  ont la même trace.
3. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  ont la même trace.

**Exercice 16.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  définie par  $u(x, y, z) = (x - y, y + z, x + y + 2z, x)$ .

1. Écrire la matrice  $A$  de  $u$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^4$ .

2. Montrer que  $A$  est équivalente à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 17.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$  est  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . On pose  $\varepsilon_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1; -1; 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1; 0; 1)$  et  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  constitue une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Écrire la matrice  $M$  de  $u$  dans cette base. Quelle relation lie  $A$  et  $M$  ?
3. Déterminer une base de  $\text{Ker } u$  et de  $\text{Im}(u)$ .

**Exercice 18.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On définit l'application :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire.
2. (a) En calculant  $u(I_n)$ , déterminer s'il existe des matrices  $A$  telles que l'application  $u$  soit injective.  
(b) Existe-il des matrices  $A$  telles que l'application  $u$  soit surjective ?
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$  où  $a \in \mathbb{C}$ . Donner la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**Exercice 19.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A^2 = \lambda A$ .

## IV. Inversibilité

**Exercice 21.** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_2$ .
2. En déduire que la matrice  $A$  est inversible et expliciter son inverse.
3. Pour tout entier  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
4. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \geq 2$ .

**Exercice 23.** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

## V. Sommes directes

**Exercice 24.** Trouver trois sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2, F_3$  de  $\mathbb{R}^3$  (deux de dimension 1 et un de dimension 2 par exemple) tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

1.  $F_i \cap F_j = \{0\}$  pour  $i \neq j$ ,
2.  $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$ ,
3.  $\mathbb{R}^3$  n'est pas la somme directe des  $F_i$ .

**Exercice 25.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Soient  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$  des familles génératrices respectives de  $F_1, \dots, F_p$ . Montrer que la réunion des  $\mathcal{G}_i$  est une famille génératrice de  $F_1 + \dots + F_p$ .
2. Montrer que les  $F_i$  sont en somme directe si et seulement si pour toutes bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$  respectivement, la famille  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est libre.
3. Montrer que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si pour toutes bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de  $F_1, \dots, F_p$  respectivement, la famille  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$ .
4. Montrer que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si  $E = F_1 + \dots + F_p$  et  $\dim E = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$ .