Feuille d'exercices n° 6

Suites de fonctions

Exercice 1. Convergence simple et uniforme
On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1[$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer si elle existe la limite $\lim_{x\to 1^-} f_n(x)$.
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et (x_n) une suite d'éléments de I. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction **continue** f et que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel $x \in I$. Montrer que $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.
2. En déduire que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Convergence et intégrales
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a,b]$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a,+\infty[$.
4. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{n}\right] ; \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

c. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 9. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^n(x)\sin(x). \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite
$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
ne tend pas vers 0.

Exercice 10. Convergence uniforme et dérivées

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Étudier les modes de convergence de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Convergence dominée

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \big(\tan(x)\big)^n \,\mathrm{d}x,$
2. $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 13. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,\mathrm{d}x,$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}.$

Exercice 14. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x.$
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ *pour tout* $u \geq 0$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n\displaystyle\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\mathrm{d}t.$

Exercice 16. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$