Devoir n^o 4 : Correction Partie Algèbre.

Exercice 1 (8 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On constate que la colonne 1 et la colonne 3 sont linéairement indépendantes, donc $\operatorname{rang}(A) \geq 2$. De plus, on constate que $3C_1 + C_2 + C_3$ donne la colonne nulle, donc via le théorème du rang on obtient $\operatorname{rang}(A) = 2$ et $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\operatorname{Ker}(A) \neq \emptyset$, 0 est valeur propre de A.

2. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -7 & 1 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 1 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$. Via $L_3 \to L_3 - L_2$ on obtient

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -7 & 1 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 0 & -(X-1) & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X+2 & -7 & 1 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$C_2 \to C_2 - C_3$ et un développement par rapport à la dernière colonne donnent alors

$$\chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X+2 & -6 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix}.$$

$C_2 \to C_2 + 3C_1$ donne

$$\chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X+2 & 3X \\ 1 & X \end{vmatrix} = X(X-1) \begin{vmatrix} X+2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = X(X-1)^2.$$

On trouve que le spectre de A est constitué de 2 éléments, 0 et 1. Ce résultat est cohéret avec la question 1.

3. Calculons E_1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 7y - z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 2y = x \end{cases}$.

Finalement on récupère donc que $E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est de dimension $1 \neq 2$ et donc A n'est pas diagonalisable.

4. Par Cayley-Hamilton, $m_A | \chi_A$. Comme A n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples. Donc $m_A = \chi_A$.

5. Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car de déterminant 1. De plus, on aura, en notant $T = P^{-1}AP$, T qui s'écrira $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ via les calculs menés en question 1 et 3. Or

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. On a donc

$$A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Par une formule vue maintes fois en TD, on a $A^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$. De plus, pour $n \geq 1$,
$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour trouver cette formle, le calcul de T^2 et T^3 ne pose pas de difficultés majeures. Enfin, une réccurence permet de démontrer cette formule sans difficulté : L'initialisation au rang 1 est donnée par la question 5. Supposons le résultat vrai au rang n pour un entier plus grand que 1 quelconque donné. On a alors $T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc la propriété est vraie pour tout n strictement positif.

Exercice 2 (4 points)**.** Soient $A,\ B,\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b et c des réels non nuls et distincts tels que pour $p = 1, 2, 3$ on ait
$$A^p = b^pB + c^pC.$$

1. $(b+c)A^2 - bcA = (b+c)(b^2B+c^2C) - bc(bB+cC) = b^3B+bc^2C+cb^2B+c^3C-cb^2B-bc^2C = b^3B+c^3C = A^3$.
2. Par la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - (b+c)X^2 + bcX$ est un polynôme annulateur de A. Or, $P(X) = X(X^2 - (b+c)X + bc) = X(X-b)(X-c)$ en utilisant les relations coefficients racines ou en calculant le discriminant pour trouver les racines. Ce polynôme est donc scindé à racines simples car $0 \neq b \neq c \neq 0$. Le polynôme minimal de A, qui divise P, est donc scindé à racines simples et donc A est diagonalisable.
3. Soit $n \geq 3$. Supposons que $\forall m, 1 \leq m \leq n \Rightarrow A^m = b^mB + c^mC$. Alors
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^3A^{n-2} \\ &= ((b+c)A^2 - bcA)A^{n-2} \\ &= (b+c)A^n - bcA^{n-1} \\ &= (b+c)(b^nB + c^nC) - bc(b^{n-1}B + c^{n-1}C) \\ &= b^{n+1}B + c^{n+1}C + cB^nB + bc^nC - bc^nC - cb^nB \\ &= b^{n+1}B + c^{n+1}C. \end{aligned}$$
Par le principe de la réccurence forte (en fait ici une réccurence sur deux rangs suffit) on obtient le résultat demandé pour tout rang n.