Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2019-2020

Mathématiques III PMI — 9 décembre 2019. Durée : 1 h 30

Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. Les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent-elles en $(0,0)$?

Exercice 2. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (xy^2, x^2 - y) \end{array}$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Justifier que $h = g \circ f$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ à l'aide de celles de g.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t^2)^n \end{array}$$

1. a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.
   b) Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
   c) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $]0,1]$ puis sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Exercice 4 (environ 7 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Que peut-on en conclure sur le spectre de A ?
2. Déterminer le spectre de A.
3. A est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. Calculer le polynôme minimal de A.
5. Justifier que A est trigonalisable et la trigonaliser (fournir une matrice de passage P et la matrice trigonalisée T correspondante, ainsi que la relation liant A, P et T).
6. Calculer T^n pour tout entier naturel n (on pourra calculer les premiers termes et faire une récurrence). Que vaut alors A^n ?

Exercice 5 (environ 4 points)**.** Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b et c des réels non nuls et distincts tels que pour $p = 1, 2, 3$ on ait

$$A^p = b^p B + c^p C.$$

1. Montrer que $A^3 = (b+c)A^2 + bcA$.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Par récurrence, montrer que pour tout entier naturel strictement positif p, on a $A^p = b^p B + c^p C$.