
Devoir n° 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Soit α un réel non nul. Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = (n + (-1)^n)^\alpha - n^\alpha,\ v_n = \frac{\alpha(-1)^n}{n^{1-\alpha}} \text{ et } w_n = u_n - v_n.$$

1. En effectuant un développement asymptotique de u_n, montrer que quand $n \to +\infty$:
$$u_n \sim v_n.$$
2. Dans cette question, on suppose que $\alpha < 0$. Montrer que la série de terme général u_n converge absolument.
3. Dans cette question, on suppose que $1 \leq \alpha$. Montrer que la série de terme général u_n diverge.
4. Dans cette question, on suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminer un équivalent simple de w_n et conclure en déterminant si la série de terme général u_n est convergente ou divergente.

Exercice 2. Pour x réel et n entier supérieur ou égal à 1, on note :

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}e^x\right),\ a_n = \int_{\ln(3n)}^{\ln(3n+1)} |f(x)|\, dx \text{ et } b_n = \ln(3n+1) - \ln(3n).$$

L'objectif de l'exercice est de prouver, sans utiliser de changement de variable, que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. La série de terme général b_n est-elle convergente ou divergente ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout x dans $[\ln(3n), \ln(3n+1)]$,
$$\frac{1}{2} \leq |f(x)|.$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{b_n}{2} \leq a_n.$$
4. En déduire que que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 3. On considère l'endomorphisme $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$M \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

où $\cdot$ est la multiplication usuelle des matrices.

1. Calculer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\det(A)$.
3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
4. Soit φ^{-1} l'application inverse de φ. Calculer $\varphi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\right]$, $\varphi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$, et $\varphi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

   Indication : On pourra écrire $\varphi^{-1} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sous la forme

   $$M \mapsto M \cdot B,$$

   où $B \in M_2(\mathbb{R})$ est une matrice à trouver.

Exercice 4. On considère la matrice tridiagonale :

$$A_n := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.
2. Pour $n \geq 4$, établir une formule linéaire de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.
3. En déduire une formule explicite pour $\det(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Dans le groupe symétrique S_7 on considère les deux permutations

$$\sigma = (1, 4, 5, 2, 3, 6) \circ (5, 4, 7, 6) \circ (2, 3, 4) \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ et τ comme produit de cycles disjoints.
2. Quelle est la signature de $\pi = \sigma \circ \tau$?
3. Écrire π^{-1} comme un produit de transpositions.