# Devoir n° 1 - Corrigé de la partie Algèbre

## Exercice 3.

1. On utilise simplement le théorème du rang qui dit que $\dim E = \dim(\mathrm{Im} u) + \dim(\ker u)$. Supposons $u$ injective alors $\ker(u) = \{0\}$ et le théorème du rang entraîne le fait que l'image de $u$ a la dimension de $E$. Comme on est en dimension finie, l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subseteq E$ est une égalité ce qui signifie que $u$ est surjective donc bijective.
2. Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $u(P) = XP$.
   Soit $P \in \ker(u)$. Alors $XP = 0$ mais alors $P = 0$ (un produit de deux polynômes est nul seulement si l'un des polynômes est nul). Cela montre que $\ker(u) = \{0\}$ et donc $u$ est injective.
   D'autre part, $1 \notin \mathrm{Im}(u)$. En effet, si 1 avait un antécédent alors il existerait $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 = XP$ ce qui serait absurde car $XP$ est de degré au moins 1 sauf si $P$ est nul. Par conséquent $u$ n'est pas surjective et donc pas bijective.

## Exercice 4.

1. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i = 0$. Cette égalité se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_n = 0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} + \mu_n = 0 \\ -\mu_1 - \mu_2 - \cdots - \mu_{n-1} + \mu_n = 0. \end{cases}$$

   On injecte les n-1 premières égalités dans la dernière et on obtient $n\mu_n = 0$ puis $\mu_n = 0$. Par suite, les autres égalités impliquent $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$. La famille des $b_i$ est donc libre. La dimension de $\mathbb{R}^n$ est $n$, tout comme le cardinal de la famille. Cette dernière est donc une base.

2. Étant donné que $\dim H + \dim D = n - 1 + 1 = \dim(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que la somme est directe, autrement dit il suffit de montrer que $H \cap D = \{0\}$. Soit donc $x \in H \cap D$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda b_n$ car $x \in D$. D'autre part $x \in H$ donc $x$ est une combinaison linéaire de $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Si $\lambda \neq 0$ cela implique (en divisant par $\lambda$) que $b_n$ est combinaison de $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ce qui contredit la liberté de la famille des $b_i$. Par conséquent $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a bien $H \cap D = \{0\}$.

3. Concernant $H$, on peut simplement donner une équation (à savoir $x_1 + \cdots + x_n = 0$) en disant que le rang du système est 1 (puisqu'il n'y a qu'une équation) et donc l'espace des solutions est de dimension $n - 1$. Ensuite, on constate que $H$ est inclus dans l'espace des solutions (car chaque $b_i$ a ses coordonnées qui satisfont l'équation donnée). Enfin on conclut en disant que $H$ et l'espace des solutions ont la même dimension et sont donc égaux. Cette première méthode cache l'utilisation du théorème du rang.
   Je propose donc une autre solution où on utilise vraiment le théorème du rang.
   Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$. On peut démontrer (je le laisse en exercice) que $\varphi$ est linéaire.
   L'image de $\varphi$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$) est un espace vectoriel dont la dimension est 0 ou 1. Or $\varphi(1, 0, \cdots, 0) = 1 \neq 0$ donc l'image n'est pas nulle. Elle est donc de dimension 1. Par le théorème du rang, le

noyau est de dimension $n-1$. D'autre part, on voit facilement que $\varphi(b_i) = 0$ pour chaque $i = 1, \ldots, n-1$ ce qui entraîne $H \subseteq \ker(\varphi)$. Or ces deux espaces sont de dimension $n-1$ ce qui entraîne l'égalité $H = \ker(\varphi)$. Par conséquent $H$ est l'espace des solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Voyons le cas de $D$.

On considère $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ définie par $\psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n)$. Sans détailler, on peut montrer que cette application est linéaire. Si on écrit la matrice de cette application dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ alors on obtiendra une matrice échelonnée ce qui permet de dire que le rang de $\psi$ est $n-1$. Par le théorème du rang, $\ker(\psi)$ est de dimension 1. On a facilement $\psi(b_n) = (0, \ldots, 0)$, i.e. $b_n \in \ker(\psi)$ donc $D \subset \ker(\psi)$. Comme ces deux espaces ont la même dimension 1, cette inclusion est une égalité ce qui fournit le système recherché.

Notons que ces systèmes qui définissent $H$ ou $D$ ne sont pas uniques.

4. Pour cette question, il suffit de calculer les $u(b_i)$ en utilisant la matrice $A$. On obtient $u(b_1) = b_1$ , …, $u(b_{n-1}) = b_{n-1}$ et $u(b_n) = (n+1)b_n$. La matrice demandée est donc la matrice diagonale suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$