Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Mathématiques III PMI 9 Décembre 2019. Durée : 1 h 30

Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. Les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent-elles en $(0,0)$?

Exercice 2. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (xy^2, x^2 - y) \end{array}$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

Justifier que $h = g \circ f$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ à l'aide de celles de g.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t^2)^n \end{array}$$

1. a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.
   b) Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
   c) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $]0,1]$ puis sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Correction Partie Analyse

Exercice 1

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions polynômiales donc continues avec le dénominateur non nul sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Reste la continuité en $(0,0)$. On a $f(0,0) = 0$. Cherchons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si elle existe.
   1ère méthode : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a
   $$0 \leq |f(x,y)| = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$
   quand $(x,y) \to (0,0)$. On a utilisé le fait que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et pareil $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
   D'où
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$
   et donc f est continue en $(0,0)$ et par suite sur R^2.
   2ème méthode (Passage aux coordonnées polaires) : Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ càd $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, on a
   $$0 \leq |f(x,y)| = \frac{r^3|cos^3\theta + \sin^3\theta|}{r^2} \leq 2r \to 0$$
   quand $r \to 0$. On a utilisé le fait que $|\cos\theta| \leq 1$ et pareil $|\sin\theta| \leq 1$.
   D'où
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$
   et donc f est continue en $(0,0)$ et par suite sur R^2.
2. f est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de deux fonctions polynômiales donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec le dénominateur non nul sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Donc les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et on a pour tout $(x,y) \neq (0,0)$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
   et par symétrie
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$
   En $(0,0)$?
   On a pour tout $t \neq 0$,
   $$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t-0}{t} = 1 \to 1$$
   quand $t \to 0$. Par suite $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 1.

   On montre pareil par symétrie que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.
   On a donc montré que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. On a d'après 2., pour tout $x \neq 0$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$
   quand $x \to 0$ et d'autre part pour tout $y \neq 0$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \to 0$$

quand $y \to 0$. Donc
$$\lim_{(x,y)\to(0,0);y=x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0);x=0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$ et donc ne peut pas être continue en $(0,0)$. Par suite f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque :

1. On aurait pu directement conclure de
$$\lim_{(x,y)\to(0,0);y=x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ car si $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet une limite en $(0,0)$, elle sera égale à $\frac{1}{2}$.
2. On montre pareil par symétrie que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$ et donc ne peut pas être continue en $(0,0)$.

4. Soit $t \neq 0$, on a
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \frac{0-1}{t} = \frac{-1}{t} \to \pm\infty$$
quand $t \to 0^{\pm}$. On déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'existe pas en $(0,0)$.

Par symétrie, on montre pareil que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$.

Exercice 2 La fonction $f = (f_1, f_2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes f_1, f_2 sont polynômiales et donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2xy,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -1.$$

Comme $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à $(u,v) \mapsto g(u,v)$ est aussi par hypothèse une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors $h = g \circ f$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculons les dérivées partielles de h.

1ère méthode : Règle de dérivation en chaîne

D'après la règle de dérivation en chaîne on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\\ &= y^2\frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) + 2x\frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\\ &= 2xy\frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y).\end{aligned}$$

2ème méthode : Matrice Jacobienne

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J_h(x,y) = J_g(f(x,y))J_f(x,y)$ avec
$$J_g(f(x,y)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y)\right)$$

et
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$J_h(x,y) = \left(y^2 \frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) + 2x \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y), \quad 2xy \frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y). \right)$$

On déduit donc que

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = y^2 \frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) + 2x \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2xy \frac{\partial g}{\partial u}(xy^2, x^2-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(xy^2, x^2-y)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1. a. Convergence simple de $(f_n)_n$.

   Soit $t_0 \in [0,1]$.

   i) Pour $t_0 = 0$, on a $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 1$.

   ii) Pour $0 < t_0 \leq 1$, on a $0 \leq 1 - t_0^2 < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t_0) = 0$.

   Par suite la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(0) = 1$ et $f(t) = 0$ pour $0 < t \leq 1$.

   b. Convergence uniforme de $(f_n)_n$:

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur $[0,1]$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$, on aurait alors f continue sur $[0,1]$.

   Or f n'est pas continue en 0 $\left(f(0) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{t \to 0} f(t) \right)$, et donc on déduit que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

   c. α) Convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $]0,1]$:

   1ère méthode :

   Pour tout $n \geq 1$, soit $t_n = \frac{1}{n}$. On a $t_n \in]0,1]$ pour tout $n \geq 1$ et

   $$|f_n(t_n) - f(t_n)| = |f_n(t_n)| = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n^2})} \to e^0 = 1 \neq 0$$

   quand $n \to +\infty$. On a utilisé le fait que $\ln(1+u) \sim_0 u$ avec $u = \frac{-1}{n^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme

   $$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \geq |f_n(t_n) - f(t_n)|,$$

   on déduit que

   $$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \nrightarrow 0$$

   quand $n \to +\infty$ et donc que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$.

   2ème méthode :

   $$\sup_{t \in]0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in]0,1]} (1-t^2)^n = 1 \to 1 \neq 0$$

   quand $n \to +\infty$. On a utilisé le fait que f_n est positive et décroissante sur $[0,1]$ ($f_n'(t) = -2t(1-t^2)^{n-1} \leq 0$ pour tout $t \in [0,1]$). Par suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$.

   β) Convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a,1]$ pour $0 < a < 1$:

   i) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f = f_n$ sur $[a,1]$ est bornée sur $[a,1]$ car $|f_n(t)) \leq 1$ pour tout $t \in [a,1]$.

   ii)

   $$\sup_{t \in [a,1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [a,1]} (1-t^2)^n = (1-a^2)^n$$

car f_n est positive et décroissante sur $[0, 1]$.

Or $0 < 1 - a^2 < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(1 - a^2)^n = 0$.

On conclut donc que $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f = 0$ sur $[a, 1]$.

2. On a

   i) f_n continue sur $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   ii) D'après 1.a., $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$ avec f continue sauf en 0 et donc continue par morceaux sur $[0, 1]$.

   iii) $|f_n(t)| \leq 1 = g(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ avec $g = 1$ continue sur $[0, 1]$ car constante et intégrable sur $[0, 1]$ borné ($\int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$).

   Par suite d'après le Théorème de convergence dominée f_n et f sont intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

.