Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2019-2020
Cursus préparatoire — 23 septembre 2019

Devoir surveillé n° 1 — Corrigé (analyse)

Exercice 1

1. La fonction f est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$, donc est intégrable sur tout segment inclus dans cet intervalle.

Lorsque $x \to 0$, on a $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$, puisque $x^{3/4}f(x) = \frac{x^{1/4}\ln x}{x+2} \to 0$, le numérateur tendant vers 0 par croissances comparées et le dénominateur tendant vers 2. On a donc $|f(x)| = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$, et comme $x \mapsto \frac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable sur $]0,1]$, la fonction $|f|$ l'est aussi, et donc f également.

Sur $[e,+\infty[$, la fonction f est à valeurs positives, et on a $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^{3/2}}$ quand $x \to +\infty$. Or, d'après le théorème des intégrales de Bertrand, $x \mapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[e,+\infty[$, et donc f l'est aussi.

Tout cela montre que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction g est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$, donc est intégrable sur tout segment inclus dans cet intervalle.

Lorsque $x \to 0$, $\operatorname{sh} x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$. Par ailleurs, $e^{2x} - 1 = 1 + 2x - 1 + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$. Par conséquent $g(x) \sim \frac{x^3/3}{2x} = \frac{x^2}{6}$. Cela montre que $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$. La fonction g est ainsi prolongeable par continuité en 0, et est donc intégrable sur $]0,1]$.

Par ailleurs, $\operatorname{sh} x - \sin x \sim \operatorname{sh} x$ lorsque $x \to +\infty$. En effet, $\frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{sh} x} = 1 - \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \to 1$ puisque sin est borné sur $\mathbf{R}$ et $\operatorname{sh} x \to +\infty$. On vérifie en outre que $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$ et que $e^{2x} - 1 \sim e^{2x}$, de sorte que $g(x) \sim \frac{e^{-x}}{2}$ quand $x \to +\infty$. Par conséquent, $|g(x)| \sim \frac{e^{-x}}{2}$, et comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, la fonction $|g|$ l'est aussi, et donc g également.

Tout cela montre que g est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2

1. Soient $\varepsilon > 0$, ainsi que $a, b \in \mathbf{R}$. La fonction $\varphi_{a,b}$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$, et est donc intégrable sur tout segment inclus dans cet intervalle. On a par ailleurs $\varphi_{a,b}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$ par croissances comparées. Par conséquent, $\varphi_{a,b}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[\varepsilon,+\infty[$, $|\varphi_{a,b}|$ l'est également, et donc $\varphi_{a,b}$ aussi.

2. (a) Écrivons le développement limité du numérateur à l'ordre 2 lorsque $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
e^{-x} - e^{-2x} - axe^{-2x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) - ax(1 - 2x + o(x)) \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - 1 + 2x - 2x^2 - ax + 2ax^2 + o(x^2) \\
&= (1-a)x + \left(2a - \frac{3}{2}\right)x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

En divisant par x^b, on obtient donc

$$\varphi_{a,b}(x) = (1-a)\frac{1}{x^{b-1}} + \left(2a - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{x^{b-2}} + o\left(\frac{1}{x^{b-2}}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to 0.$$

2. (b) D'après ce développement, on voit que si $a \neq 1$, alors $\varphi_{a,b}(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1-a}{x^{b-1}}$, et donc $|\varphi_{a,b}(x)| \underset{0}{\sim} \dfrac{|1-a|}{x^{b-1}}$. Or, on sait que $x \mapsto \dfrac{1}{x^{b-1}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $b-1<1$, c'est-à-dire si et seulement si $b<2$. Ainsi, $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $b<2$.

Si au contraire $a=1$, on a $\varphi_{a,b}(x) = \dfrac{1}{2x^{b-2}} + o\left(\dfrac{1}{x^{b-2}}\right)$, c'est-à-dire que $\varphi_{a,b}(x) \sim \dfrac{1}{2x^{b-2}}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, $\varphi_{a,b}$ est alors intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $b-1<2$, c'est-à-dire $b<3$.

D'après la question 1 et ce qu'on vient d'écrire, la fonction $\varphi_{a,b}$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $a \neq 1$ et $b<2$, ou $a=1$ et $b<3$.

3. Il s'agit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{0,2}(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas convergente. Or, on a vu dans la question précédente que $\varphi_{0,2}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$, et on vérifie que $\varphi_{0,2}$ est à valeurs positives sur cet intervalle, ce qui permet de répondre directement à la question.

4. Soit $\varepsilon>0$. On effectue une intégration par parties avec $u' = \dfrac{1}{x^2}$ et $v = e^{-x}-e^{-2x}$, de sorte que $u = -\dfrac{1}{x}$ et $v' = -e^{-x}+2e^{-2x}$. Remarquons alors que u et v sont de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$, que $u'v = \varphi_{0,2}$ est intégrable sur $[\varepsilon,+\infty[$ d'après la question 1, et que $uv = -\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ a une limite finie en $+\infty$, à savoir 0. Cela justifie donc l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\right]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-2e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{e^{-\varepsilon}-e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-2e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a

$$\frac{e^{-\varepsilon}-e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon+o(\varepsilon))-(1-2\varepsilon+o(\varepsilon))}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon+o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1+o(1).$$

On a donc bien

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-2e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x + o(1).$$

5. Soit $\varepsilon>0$. Remarquons que l'intégrale proposée dans le membre de gauche de la formule de l'énoncé est convergente d'après la question 1. On commence par écrire

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}-xe^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale peut se décomposer en deux morceaux car $\varphi_{0,2} : x \mapsto \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}$ et $\varphi_{0,2}-\varphi_{1,2} : x \mapsto \dfrac{e^{-2x}}{x}$ sont intégrables sur $[\varepsilon,+\infty[$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}-xe^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x. \\ &= 1 - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-2e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x + o(1) \quad \text{d'après la question 3.} \\ &= 1 - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x + o(1).\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}-xe^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

puis à utiliser le résultat admis par l'énoncé, de sorte que finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}-xe^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$$