7.2 Chapitre 2

Démonstration du Lemme 2.13. On commence par le cas $k = 1$. Tout d'abord, soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(1) = 1$. Soit $\tau \in S_{n-1} = S(\{1, \dots, n-1\})$ définie par $\tau(i) = \sigma(i+1) - 1$. Montrons que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$. On a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{(\sigma(j+1) - 1) - (\sigma(i+1) - 1)}{(j+1) - (i+1)} \\
&= \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \prod_{2 \leq q \leq n} \frac{\sigma(q) - \sigma(1)}{q - 1} \times \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \varepsilon(\sigma).
\end{aligned}$$

Dans la suite on notera τ_σ une telle application associée à $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(1) = 1$.

Soit $B = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$. Notons b_{ij} ses coefficients de sorte que $b_{ij} = a_{i+1,j+1}$.

Montrons que $\det(A) = \det(B)$ ce qui montrera bien que $\det(A) = (-1)^{k+1} \det(B)$ dans le cas $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=2}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} a_{\sigma(i+1),i+1} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} a_{\tau(i)+1,i+1} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1} \varepsilon(\tau_\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} b_{\tau(i),i} \\
&= \sum_{\tau \in S_{n-1}} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n-1} b_{\tau(i),i} \\
&= \det(B).
\end{aligned}$$

Traitons le cas où $k \geq 2$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & L_k \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_n \end{pmatrix}.$$

Autrement la ligne k de A est constituée d'un 1 puis d'autres coefficients regroupés dans la notation L_k. Les autres lignes ont un 0 puis d'autres termes qu'on regroupe dans L_i. Ainsi L_i contient $n - 1$

coefficients. Dans une matrice, un échange de deux lignes provoque un signe moins sur le déterminant. On considère la permutation (le cycle) $\tau = (i \quad k-1 \quad \cdots \quad 1)$. On peut le décomposer ainsi : $\tau = (k \ k-1)(k-1 \ k-2)\cdots(3 \ 2)(2 \ 1)$. Il contient $k-1$ transpositions donc $\varepsilon(\tau) = (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

On obtient alors $\det(A) = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} 1 & L_k \\ 0 & L_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_{k-1} \\ 0 & L_{k+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_n \end{pmatrix}$. Ensuite on applique le cas $k = 1$ et on obtient

$\det(A) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. □

Démonstration du Lemme 2.18. Montrons l'implication "⇒". Par hypothèse, il existe une famille de (au moins) r colonnes qui est libre. Formons la matrice constituée de r de ces colonnes ; B est donc une matrice de $M_{n\times r}(\mathbb{K})$. On sait que B et ${}^tB$ ont le même rang, à savoir r. Donc il existe dans B, r lignes qui forment une famille libre. Notons C la matrice formée de ces lignes. Cette matrice est une matrice carré de taille r et elle est de rang r, i.e. elle est inversible, autrement de déterminant non nul. Or ce déterminant est un mineur d'ordre r issu de A d'où la conclusion.
Montrons l'implication "⇐". Quitte à échanger des lignes et des colonnes de A, on peut supposer que le mineur qu'on obtient en prenant la déterminant de $C = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ est non nul. Dans cette matrice C, en particulier, les lignes sont linéairement indépendantes. Notons B la matrice formée des r premières colonnes de A (B contient C comme sous-matrice). Les r premières lignes de B sont les lignes de C et elles sont libre donc le rang de B est au moins r. Mais comme B est de taille $n \times r$, son rang n'excède pas r. Par conséquence, le rang de B est r ce qui signifie que les r premières colonnes de A forment une famille libre et donc A est de rang $\geq r$. □