
Feuille d'exercices n° 4

VALEURS PROPRES, SOUS-ESPACES PROPRES, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Exercice 1. Déterminer le spectre et les espaces propres de chacun des endomorphismes suivants :

1. L'application identique d'un espace vectoriel E.
2. L'endomorphisme u_2 de $\mathbf{R}^2$ défini par $u_2(x,y) = (x,0)$.
3. L'endomorphisme u_3 de $\mathbf{R}^2$ défini par $u_3(x,y) = (-y,x)$.
4. L'endomorphisme u_4 de $\mathbf{C}^2$ défini par $u_4(z,w) = (-w,z)$.
5. L'endomorphisme u_5 de $\mathbf{C}^2$ défini par $u_5(z,w) = (5z+w, 5w)$.
6. Un endomorphisme nilpotent u_6 d'un espace vectoriel E.
7. L'endomorphisme u_7 de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ défini par : si $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, alors $u_7((a_n))$ est la suite (b_n) définie par $b_n = a_{n+1}$.
8. L'endomorphisme u_8 de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ défini par $u_8(f) = f'$.
9. L'endomorphisme u_9 de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ défini par $u_9(f) = f''$.
10. L'endomorphisme u_{10} de $\mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, espace des fonctions infiniment dérivables et 2π-périodiques, défini par $u_{10}(f) = f''$.

Exercice 2. Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous-espaces propres de chacune des matrices suivantes, que l'on considérera successivement comme matrices réelles puis complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient $n, m \in \mathbf{N}^*$.

1. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
   (a) Montrer que si A ou B est inversible, alors les matrices AB et BA sont semblables. Donner un exemple montrant que si ni A, ni B ne sont inversibles, alors il se peut que AB et BA ne soient pas semblables.
   (b) On définit par blocs deux matrices $C = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & XI_n \end{pmatrix}$. Calculer les produits CD et DC et en déduire que $\det C = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$. En faisant des calculs similaires à ceux de la question précédente, trouver une relation entre χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 4. Étant donné un polynôme unitaire $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, sa "matrice compagnon" est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que tous les espaces propres d'une matrice compagnon sont des droites.

Exercice 5. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. On note v la restriction de u à $\ker u$. Que vaut χ_v ? En déduire qu'il existe un et un seul réel α tel que $\chi_u = X^{n-1}(X-\alpha)$.
2. Montrer que $u \circ u = \alpha u$.
3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbf{R}^n$ et que u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique ne comporte que des 1. Que vaut χ_u ? Étant donnés deux réels a et b, que vaut le déterminant de la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux valent b et tous les autres valent a ?

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie n, soit α un réel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant l'égalité $u \circ u = \alpha u$.

1. Rappeler la démonstration du fait "bien connu" suivant : si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.
   Indication : pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$.
2. Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 0$. En posant $p = \dfrac{1}{\alpha} u$, montrer que le spectre de u possède au plus deux éléments, que le polynôme caractéristique de u est scindé et que la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée dans le polynôme caractéristique.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
   Indication : on pourra considérer une matrice A de u dans une base quelconque de E et montrer que si A possède une valeur propre, elle est nécessairement nulle.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour toute racine n-ième de l'unité ω et pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$, on introduit les notations suivantes :

$$X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice M est appelée une "matrice circulante".

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Montrer que chaque vecteur X_ω est un vecteur propre de $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ et préciser la valeur propre associée en utilisant le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.
2. En considérant la matrice $M(0, 1, 0, \ldots, 0)$, montrer que la famille $(X_\omega)_{\omega \in \mathbf{U}_n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$.
3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ et $M = M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. On note u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ défini par $u(X) = MX$. Quelles sont les matrices respectives de u dans la base canonique et dans la base $(X_\omega)_{\omega \in \mathbf{U}_n}$? En déduire le déterminant et le polynôme caractéristique de M.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un sous-espace non trivial de $\mathbf{C}^n$ (c'est-à-dire ni égal à $\{0\}$, ni égal à $\mathbf{C}^n$) qui est stable par tous les endomorphismes qui commutent avec u.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$. En utilisant la question 1, montrer que u est une homothétie.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, puis en déduire que A est une matrice scalaire, c'est-à-dire une matrice de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
4. Le résultat de la question 2 reste-t-il vrai si l'on y remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$? Et pour la question 1 ?