Université Claude Bernard - Lyon 1 Automne 2019-2020

Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 2

PERMUTATIONS, DÉTERMINANTS

Mise au point préalable sur les notations

* Sur cette page, on note S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble fini $\{1, \cdots, n\}$;

* Une permutation σ de S_n pourra être notée $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ou, pour prendre moins de place, simplement $\sigma(1) \quad \dots \quad \sigma(n)$ **sans** parenthèses ;

* Étant donnés k éléments distincts de S_n, la notation $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ **avec** parenthèses désigne le cycle qui envoie i_1 sur i_2, i_2 sur i_3, ..., i_{k-1} sur i_k et i_k sur i_1.

Le symbole $\circ$ de composition des applications pourra être omis, notamment dans l'écriture d'une permutation comme produit de cycles de supports deux à deux disjoints.

Exercice 1.

1. Dans S_5, soit les permutations $\sigma_1 = (12345)$, $\sigma_2 = (12)$ et $\sigma_3 = (135)(24)$. Représenter chacune d'entre elles par un joli dessin avec une patate, cinq points et une flèche de chaque point vers son image, et réécrire chacune d'entre elles avec la première des notations rappelées en ouverture de cette fiche.
2. Dans S_9, soit les permutations $\rho_1 = 412937568$, $\rho_2 = 351487629$ et $\rho_3 = 987654321$. Les dessiner avec patates et flèches, puis les écrire comme produits de cycles de supports deux à deux disjoints.

Exercice 2.

1. Dans S_3 soit $\pi = 231$ et $\sigma = 312$. Calculer $\sigma \circ \pi$, puis σ^{-1} et préciser la signature de σ.
2. Soit $n \geq 3$. Dans S_n soit $\pi = (123)$ et $\sigma = (13)$. Calculer $\sigma\pi$ et $\pi\sigma$.
3. Dans S_4 soit $\sigma = (12)(34)$ et $\pi = (1342)$. Expliciter leurs inverses et préciser leurs signatures respectives. écrire π comme un produit de transpositions.
4. Plus généralement soit un cycle $(i_1 \dots i_k)$ dans S_n. Préciser sa signature en fonction de n et k.

Exercice 3. Soit σ une permutation d'un ensemble fini.

1. Montrer qu'il existe deux entiers naturels distincts $a < b$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\sigma^a = \sigma^b$. Que vaut σ^{b-a} ?
2. En déduire qu'il existe un plus petit entier $n \in N^*$ tel que σ^n soit égale à l'identité. On l'appelle l'**ordre** de la permutation σ.
3. Quel est l'ordre de la permutation $2341 \in S_4$?
4. Plus généralement, soit un cycle $(i_1 ... i_k)$ dans S_n. Quel est son ordre ?
5. Dans S_6, quels sont les ordres respectifs de $(123) \circ (45)$ et de $(14) \circ (2356)$?
6. Plus généralement, si $(i_1 ... i_k)$ et $(j_1 ... j_l)$ sont deux cycles dans S_n, dont les supports sont disjoints, quel est l'ordre de leur produit ?

Exercice 4. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 15 & 21 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de développement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.
Calculer AB puis $\det B$.

Exercice 7. Soient a, b, c et d quatre réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+2 & 2a+4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur absolue du déterminant de M.
2. Préciser la valeur de $\det[M(a,0,0,0)]$.
3. Dans cette question, on suppose $(b,c,d) \neq (0,0,0)$. Pour t réel, on pose $f(t) = \det[M(ta-t+1, tb, tc, td)]$. Montrer que la fonction f ne s'annule pas et, par ailleurs, que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Calculer D_n en fonction de n (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a.

Exercice 11. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la matrice dite “tridiagonale”, à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

Exercice 12. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la matrice, à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant.

1. Calculer D_n pour $n = 2$ puis $n = 3$.
2. Pour $n \geq 4$, établir une relation linéaire de récurrence qui relie D_n à D_{n-1} et D_{n-2}.
3. En déduire une expression explicite de D_n.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'égalité suivante (déterminant dit "de Vandermonde") :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 14. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e* ${}^tA = -A$.
Montrer que si A est inversible, alors n est nécessairement pair.

Exercice 16. Soit $n \geq 2$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice d'une matrice M.

1. Montrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est la matrice nulle.
2. Montrer que si A est de rang n, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang n.
3. Montrer que si A est de rang $n-1$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Que vaut ${}^t\mathrm{Com}({}^t\mathrm{Com}(A))$?
5. On suppose dans cette question que $n \geq 3$. Que vaut ${}^t\mathrm{Com}({}^t\mathrm{Com}(A))$? (On distinguera deux cas, selon que A est ou non inversible).

Exercice 17. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est entier.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers. Montrer que si tous les coefficients de A sont impairs, alors $\det A$ est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 19. On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.