On calcule une base orthonormée de H par exemple en donnant un base de H et faisant Gram-Schmidt. On peut ensuite en déduire la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Mais il y a une façon plus simple de trouver a,b tels que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ dans une bond $\mathcal{B}$...

Commençons par répondre à cette question :

Q : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont 2 b.ond telles que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$$

est-ce que $a=c$ et $b=d$? Sinon quel lien entre ces matrices ?

- On sait que $\text{Trace}(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Trace}(Mat_{\mathcal{B}'}(u))$ donc $a = c$ et $b^2 = d^2$ donc $b = \pm d$
- Si $a = c = 1$ alors $b = d = 0$ et $u = id$.
- Si $a, c \neq 1$ alors $\dim \text{Ker}(u - id) = 1$ (car $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation d'un plan euclidien différente de $\pm id$ donc n'a pas de valeurs propres réelles).

Si on note $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1', f_2', f_3'\}$

$f_1, f_1' \in \text{Ker}(u - id)$. Puisqu'ils sont