Groupe orthogonal en dimension 3

Dans ce chapitre E est un espace euclidien de dim 3

On commence par étudier les rotations (i.e. les éléments de SO(E)).

<u>prop</u> : Soit $u \in SO(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2+b^2=1.$$

<u>preuve</u> : 1) Il existe un vecteur non nul de E fixé par u.

En effet, on considère l'application

$$\varphi : \lambda \mapsto \det(u - \lambda\, id)$$

Dans n'importe quelle base φ est une application polynomiale de degré 3. Le coefficient dominant de $\varphi(\lambda)$ (coeff. de λ^3) est -1 et $\varphi(0) = 1$. (car $\det u = 1$). Puisque $\varphi(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} -\infty$ et φ est continue il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$.

Puisque λ_0 est une valeur propre de u et $Sp(u) \in \{1, -1\}$ alors $\lambda_0 = 1$. Il existe donc $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tel que $u(x_0) = x_0$.

2) On pose $H = \{x_0\}^{\perp}$. Puisque $\mathrm{Vect}\{x_0\}$ est un sous-espace stable par u alors H aussi. L'endomorphisme $u_{|H}$ (u restreint à H) est donc un endomorphisme de H et il est orthogonal. On choisit une base orthonormée