

Dans un espace à  $n$  dimensions, il existe une base orthonormale  $\{e_i\}_{i=1}^n$  telle que pour tout vecteur  $v \in E$ , on a :
 
$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$
 où  $v_i = \langle v, e_i \rangle$  est le coefficient de  $e_i$  dans la décomposition orthogonale de  $v$ .

Soit  $A$  une matrice réelle  $n \times n$ . On cherche à déterminer si  $A$  est orthogonale, c'est-à-dire si pour tous  $v, w \in E$  on a :
 
$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$
 Cela équivaut à montrer que pour tous  $v, w \in E$  on a :
 
$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$
 ou équivalemment :
 
$$\langle A(v-w), Aw \rangle = 0$$
 Soit  $v, w \in E$  tels que  $v \neq w$ . Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = w + \lambda(v-w)$ . Donc :
 
$$\langle A(v-w), Aw \rangle = \langle A(w + \lambda(v-w)), Aw \rangle = \langle Aw, Aw \rangle + \lambda \langle Aw, A(v-w) \rangle = \langle Aw, Aw \rangle + \lambda \langle Aw, A(w - v) \rangle = \langle Aw, Aw \rangle - \lambda \langle Aw, Aw \rangle = (\lambda - 1) \langle Aw, Aw \rangle$$
 Or  $\langle Aw, Aw \rangle = \langle A^T w, Aw \rangle = \langle w, A^T A w \rangle$ . Si  $A$  est orthogonale, alors  $A^T A = I_n$ , donc  $\langle w, A^T A w \rangle = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$ . Par conséquent, si  $A$  est orthogonale, alors  $\langle Aw, Aw \rangle = \|Aw\|^2$  et  $\langle A(v-w), Aw \rangle = 0$ .

Preuve : Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On considère l'application linéaire  $M_A : E \rightarrow E$  définie par :
 
$$M_A(v) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v$$
 On note  $a^2 + b^2 = 1$ . On a :
 
$$\langle M_A(v), M_A(w) \rangle = \langle \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w \rangle = \langle \begin{pmatrix} av + bw & aw - bv & 0 \\ 0 & aw - bv & -bw \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} aw & bw & 0 \\ 0 & aw & -bw \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \rangle = \langle (av + bw)w, (aw - bv)w \rangle = aw^2 - bv^2$$
 Or  $w^2 = aw^2 + bw^2$ , donc  $\langle M_A(v), M_A(w) \rangle = 0$ .

Dans le chapitre 3, on a vu que si  $A$  est orthogonale, alors  $A^T A = I_n$ . Soit  $E$  un espace à  $n$  dimensions. On considère l'application linéaire  $M_A : E \rightarrow E$  définie par :
 
$$M_A(v) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v$$
 Soit  $v \in E$ . Alors :
 
$$\langle M_A(v), M_A(v) \rangle = \langle \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v \rangle = \langle \begin{pmatrix} av + bv & av - bv & 0 \\ 0 & av - bv & -bv \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} av & bv & 0 \\ 0 & av & -bv \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \rangle = \langle (av + bv)v, (av - bv)v \rangle = a^2v^2 + b^2v^2 = v^2$$
 Par conséquent,  $M_A$  est orthogonale.

Groupes orthogonaux en dimension 3