Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre d'automne 2018-2019

Mathématiques III - Cursus préparatoire 2A | Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 3

Partie analyse

Exercice 1 (3=1,5+1,5 points). 1. Connaissant le développement limité de l'exponentielle en 0, on a, lorsque n tend vers l'infini :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On en déduit que

$$\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

2. La série de terme général $1/n^2$ est (positive et) convergente (série de Riemann avec «$\alpha = 2$»). Par le critère de comparaison des séries positives, on en déduit que la série $\sum\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\Big)$ est convergente.

Commentaires, erreurs fréquentes, etc.. *Vu le traitement qu'a subi cet exercice repris du DS 2 en version simplifiée, peu nombreux sont ceux et celles qui ont travaillé le corrigé dudit DS...*
Il n'a pas semblé évident à tout le monde de commencer par un développement limité de l'exponentielle en 0*. Pour ceux et celles qui s'y sont lancés, il a donné lieu à des erreurs :* $-1/n$ *au lieu de* $1/n$*, il n'y avait alors plus de simplification du terme en* $1/n$ *; moins gênant pour la suite,* $1/n^2$ *au lieu de* $1/(2n^2)$ *pour le deuxième terme... comme dans une version antérieure de ce corrigé !).*
Les écritures suivantes sont apparues très souvent :

$$\mathrm{e}^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \qquad \textit{ou} \qquad \mathrm{e}^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Ces assertions sont exactes mais elles signifient que le quotient de ce qui est à gauche du signe $\sim$ *par ce qui est à droite tend vers* 1 *lorsque* n *tend vers l'infini. Autrement dit, cela apporte pour seule information que* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1/n} = 1$*. On ne peut pas utiliser un tel équivalent pour en déduire un équivalent de* u_n*, tout simplement parce qu'***il n'y a aucun théorème qui permet d'ajouter ou de retrancher les équivalents** *dans le cours. La plupart de ceux et celles qui ont obtenu un équivalent ont obtenu une conclusion cohérente. Cependant, trop peu de copies mentionnent le signe des séries, alors qu'***il faut des séries positives pour pouvoir appliquer le théorème de comparaison** *(ou du moins, de signe constant à partir d'un certain rang).*
Faut-il rappeler que pour un nom propre, **les majuscules sont obligatoires** *et que* **R***iema***nn** *s'écrit avec deux n – et une majuscule ? Enfin, il vaut mieux éviter des abréviations comme «* $\sum u_n$ *CV » ou « Par Riemann ».*

Exercice 2 (3=1,5+1,5 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. On peut par exemple écrire $t^2 + t + 1 = \big(t + \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}$ ou calculer le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 < 0$.
   Soit $(x,y) \neq (0,0)$, il faut montrer que $x^2 + xy + y^2 \neq 0$. Si par exemple $y \neq 0$, on écrit $x^2 + xy + y^2 = y^2(t^2 + t + 1)$ avec $t = x/y$. Cette quantité est strictement positive donc f est bien définie en (x,y).
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x,x) = \dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$, de sorte que $\lim\limits_{x \xrightarrow{\neq} 0} f(x,x) \neq f(0,0)$ et f n'est pas continue en $(0,0)$.

Commentaires, erreurs fréquentes, etc.. *Il n'est pas normal que tout le monde n'ait pas réussi à traiter la première question, du moins la première partie. C'est du programme de seconde. Pour éviter la mise sous forme canonique*[1]*, on pouvait par exemple invoquer un discriminant strictement négatif (et un coefficient dominant ou une valeur strictement positifs) ou bien étudier la fonction par dérivation.*
La manipulation des inégalités est catastrophique dans beaucoup de copies, que ce soit des inégalités fausses érigées comme « évidences » (par exemple : $t^2 \geq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou $xy < 2xy$ pour tout (x, y)) ou des déductions fausses (par exemple, partant de $2|xy| \leq x^2 + y^2$, déduire $\frac{1}{2|xy|} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$ ou, dans l'exercice suivant, partant de $x - a \leq z - a \leq y - a$, aboutir à $|x - a| \leq |z - a| \leq |y - a|$).
Croyez-le ou pas, résoudre $2t + 1 = 0$ ou remplacer t par $-1/2$ dans $t^2 + t + 1$, cela provoque des erreurs.

Exercice 3 (6=1+1+1+2+1 points)**.** On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y\ ; \\ -\sin(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Soit a un réel, on étudie la continuité de f en (a, a). Soit $\varepsilon > 0$.

1. (a) L'existence de z vient du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction cosinus, qui est dérivable sur l'intervalle $[x, y]$ (ou $[y, x]$).

   (b) Comme z est compris entre x et y, la distance $|z-a|$ de z à a est inférieure ou égale à $\max\big(|x-a|, |y-a|\big)$.

   Première version. Supposons par exemple que $x \leq z \leq y$. Si $a \leq z$, alors $0 \leq z - a \leq y - a$. Si $z \leq a$, alors $0 \leq a - z \leq a - x$.
   Deuxième version. Écrivons $z = \alpha x + \beta y$, avec $\alpha = \frac{z-y}{x-y}x$ et $\beta = \frac{z-x}{y-x}$ compris entre 0 et 1 et $\alpha + \beta = 1$. Alors $z - a = \alpha(x - a) + \beta(y - a)$ donc

   $$|z - a| \leq \alpha|x - a| + \beta|y - a| \leq (\alpha + \beta) \max\big(|x - a|, |y - a|\big).$$

   Comme $|x - a| \leq \big\|(x, y) - (a, a)\big\|$ et que $|y - a| \leq \big\|(x, y) - (a, a)\big\|$, on a : $|z - a| \leq \big\|(x, y) - (a, a)\big\|$.

   (c) Comme $f(a, a) = -\sin a$, l'existence de β est une conséquence de la continuité de la fonction $-\sin$.

   (d) Si $x = y$, alors $f(x, y) = -\sin x$. Or $|x - a| \leq \big|(x, y) - (a, a)\big| \leq \beta$ donc $\big|-\sin x + f(a, a)\big| \leq \varepsilon$.
   Si $x \neq y$, on introduit z comme dans la question 1a. Comme $|z - a| \leq \big|(x, y) - (a, a)\big| \leq \beta$, il vient $\big|-\sin z + f(a, a)\big| \leq \varepsilon$ et donc $\big|f(x, y) - f(a, a)\big| \leq \varepsilon$.

2. On vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que si $\big|(x, y) - (a, a)\big| \leq \beta$, alors $\big|f(x, y) - f(a, a)\big| \leq \varepsilon$. Cela signifie que f est continue en (a, a).

Remarque. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$. On a :

$$f(x, y) = \frac{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x - y} = -\sin\frac{x + y}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = -\sin\frac{x + y}{2} S\Big(\frac{x - y}{2}\Big),$$

où S est la fonction définie par $S(0) = 1$ et $S(u) = \frac{\sin u}{u}$ pour $u \neq 0$ – c'est une fonction continue.
De façon amusante, l'expression ci-dessus est encore valable si $x = y$, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = -\sin\frac{x + y}{2} S\Big(\frac{x - y}{2}\Big).$$

Quand on l'écrit sous cette forme, la continuité saute aux yeux.
L'intérêt de la méthode présentée est qu'elle s'étend sans modification si, dans la définition de f, on remplace le cosinus par une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque et l'opposé sinus par g'.

1. Mais qu'avez-vous fait dans le premier mois de L1 ?!

Commentaires, erreurs fréquentes, etc.. *Vous ne gardez pas la tête froide ou vous ne vous souvenez pas des cours de l'an dernier*[2]. *La question 1a était le théorème des accroissements finis – et pas le théorème des valeurs intermédiaires, comme beaucoup semblent le croire ! – et la question 1c était la définition de la continuité de la fonction* $-\sin$ *: c'est difficile ? Quant à la question 2, c'était plus un exercice d'écriture qu'une question de mathématiques : il suffisait de lire l'énoncé de la question 1 et de voir qu'il démontrait la continuité de* f *en* (a, a). *La question 1b a été un peu abordée et souvent mal traitée, voire maltraitée par une implication (déjà évoquée) telle que* $x - a \leq z - a \leq y - a \implies |x - a| \leq |z - a| \leq |y - a|$, *qui est faux si par exemple* $x < z < y < a$.

Partie algèbre

Exercice 4. $\simeq 4$ *points.*
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. On constate que toutes les colonnes de A sont multiples de la première, qui n'est pas nulle, d'où $\text{rg}(A) = 1$ et le théorème du rang nous apprend alors : $\dim(\ker(A)) = 3$.
2. Comme $\ker(A)$ est un espace de dimension 3, on a $m_0 = \dim E_0 = \dim(\ker(A)) = 3$. Or, on sait que l'ordre de multiplicité géométrique d'une valeur propre est toujours inférieur ou égal à l'ordre de multiplicité algébrique de cette même racine ; c'est à dire à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. Ici X^3 divise donc $\chi_A(X)$, d'où $\chi_A(X) = X^3 P$ où le degré de P est $4 - 3 = 1$. Enfin, tout polynôme unitaire de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme $X - \alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où le résultat attendu.
3. D'après le cours, $a_n = 1$, $a_{n-1} = \text{tr}(B)$ et $a_0 = (-1)^n \det(B)$. On obtient donc ici $\alpha = \text{tr}(A) = 10$ (et aussi $\det(A) = 0$, ce que l'on savait déjà).
4. L'ordre de multiplicité géométrique de 10 étant au minimum 1, on récupère $\dim(E) = 4 \leq m_0 + m_{10}$ donc on a égalité et A est diagonalisable.

Exercice 5. $\simeq 4$ *points.*
Soit

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Il y a plusieurs méthodes pour répondre à cette question, on peut par exemple calculer le polynôme caractéristique et chercher ses racines. La solution que je propose ici a l'avantage de répondre directement à la question qu'on aurait à résoudre ensuite, à savoir trouver les vecteurs propres.*

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Alors :

$$BX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 11x - 5y + 5z = \lambda x \\ -5x + 3y - 3z = \lambda y \\ 5x - 3y + 3z = \lambda z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 11x - 5y + 5z = \lambda x \\ -5x + 3y - 3z = \lambda y \\ \lambda(y + z) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = \lambda(x + 2y) \\ -5x + 3y - 3z = \lambda y \\ \lambda(y + z) = 0. \end{array} \right.$$

2. Bien sûr, le ≪ ou ≫ n'est pas exclusif.

La dernière égalité amène à distinguer $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Pour $\lambda = 0$, notre système devient :

$$BX = 0X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y = z \\ -5x + 3y - 3(x + y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y = z \\ 8x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = z \\ x = 0. \end{array} \right.$$

Donc 0 est valeur propre et on a $E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda \neq 0$ notre système devient :

$$BX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = \lambda(x + 2y) \\ -5x + 3y - 3z = \lambda y \\ y = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = \lambda(x + 2y) \\ -5x = (\lambda - 6)y \\ y = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x + 2y)(1 - \lambda) = 0 \\ -5x = (\lambda - 6)y \\ y = -z. \end{array} \right.$$

La première égalité amène à distinguer $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.

Pour $\lambda = 1$, l'équation devient

$$BX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -5x = -5y \\ y = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = y \\ y = -z. \end{array} \right.$$

Donc 1 est valeur propre et on a $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Finalement, il nous reste au plus une valeur propre à trouver, et donc $\lambda \notin \{0; 1\}$ donne :

$$BX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -2y \\ -5x = (\lambda - 6)y \\ y = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -2y \\ 16y = \lambda y \\ y = -z. \end{array} \right.$$

Donc 16 est valeur propre et on a $E_{16} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice B possède donc 3 valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3, on en déduit donc qu'elle est diagonalisable.

3. Le cours nous donne alors $B = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. $\simeq 6$ *points – donc* 4 *points bonus.*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E et $\{0_E\}$ sont les seuls sous-espaces stables par u.

1. Supposons que u possède une valeur propre réelle λ. Soit alors x un vecteur propre[3] associé à λ. Alors, $\mathrm{Vect}(x)$ est un sous espace stable par u ; comme sa dimension est 1, il n'est égal ni à E, ni à $\{0_E\}$. Donc u ne possède pas de valeur propre réelle.

2. (a) Soit p avec $1 \leq p \leq n-1$ fixé. Si $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$, alors le sous-espace $\mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u et, de plus, $1 \leq \dim \mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)) \leq n-1$ puisque $x \neq 0$ et que la famille génératrice proposée contient $p \leq n-1$ éléments. Ceci contrevient donc à l'hypothèse initiale, d'où l'assertion demandée.

   (b) Par cardinalité, il suffit de montrer que la famille considérée est libre. Nous allons donc montrer la propostion suivante Prop_p : « $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$ est une famille libre » pour tout p avec $0 \leq p \leq n-1$ (ici $u^0 = \mathrm{Id}$). La propriété Prop_0 est vérifiée car x est non nul. Soit p quelconque fixé entre 0 et $n-2$. On suppose Prop_p vraie. Montrons Prop_{p+1}. La question précédente permet d'affirmer que $u^{p+1}(x) \notin \mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x))$, et, par liberté de $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x))$, on a bien Prop_{p+1} démontrée. Finalement, par récurrence, on a montré que Prop_p vraie pour tout p tel que $0 \leq p \leq n-1$. En particulier, $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

   (c) Puisque $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $u^n(x) = a_0 x + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$. La matrice de u est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   C'est une matrice compagnon.

3. Soient x et y des vecteurs non nuls de E. On peut écrire y dans la base dépendant de x précédemment trouvée : il existe des réels $y_0, \dots, y_{n-1}$ tels que $y = y_0 x + \cdots + y_{n-1} u^{n-1}(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} u^n(y) &= y_0 u^n(x) + \cdots + y_{n-1} u^{n-1}(u^n(x)) \\ &= y_0(a_0 x + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)) + \cdots + y_{n-1} u^{n-1}(a_0 x + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)) \\ &= a_0 y + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(y). \end{aligned}$$

   Ceci implique que la matrice de u dans la base adaptée à x et dans celle adaptée à y seront les mêmes, et elles seront toutes les deux égales à la matrice précédemment trouvée.

Remarque.

— Le contenu de cet exercice n'est en fait pas si différent de ce qui a été fait dans l'exercice 9 de la feuille 1.

— Il est encore possible de montrer qu'ici $n = 2$ nécessairement. Si certains d'entre vous sont intéressés mais n'arrivent pas à le démontrer, je rédigerai une preuve.

3. Rappel : un vecteur propre n'est pas nul.