Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019
Cursus préparatoire 15 octobre 2019

Devoir surveillé n° 2 — Corrigé (algèbre)

Exercice 1 Développons Δ_n par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Le premier des deux derniers déterminants est Δ_{n-1}. Pour le deuxième, en le développant par rapport à la première ligne, on voit qu'il est égal à Δ_{n-2}. On obtient donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\Delta_n = -\Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2}.$$

La suite $(\Delta_n)_{n \geqslant 2}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, dont les racines sont 1 et -2. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\Delta_n = \lambda + (-2)^n \mu.$$

Or, on calcule directement

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = 3 \\ \lambda - 8\mu = -5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = 1/3 \\ \mu = 2/3. \end{cases}$$

Finalement, pour tout $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \dfrac{1}{3} + (-2)^n \cdot \dfrac{2}{3}$, ou encore

$$\boxed{\Delta_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}}$$

Exercice 2

1. Pour calculer $\det M$, on peut commencer par effectuer l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n$: tous les coefficients de la première ligne deviennent alors $x + 1 + 2 + \cdots + n = x + \dfrac{n(n+1)}{2}$, de sorte que

$$\det M = \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & x+n \end{vmatrix}.$$

Retranchons maintenant C_1 à toutes les autres colonnes :

$$\det M = \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Le déterminant obtenu est triangulaire, donc est égal au produit des éléments diagonaux. Ainsi,

$$\boxed{\det M = x^{n-1} \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

2. On voit immédiatement que $\det M = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, si x n'est pas égal à l'une de ces valeurs, $\det M \neq 0$: la matrice M est donc inversible et donc est de rang n.

Si $x = 0$, alors toutes les colonnes de M sont identiques et non nulles, ce qui montre que M est de rang 1.

Si $x = -\dfrac{n(n+1)}{2}$, en refaisant sur M les mêmes opérations que l'on a effectuées sur son déterminant, on voit que M est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} x + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}.$$

Puisque x est non nul, la première colonne de cette dernière matrice est combinaison linéaire des autres, qui sont quant à elles clairement indépentantes (elles forment une famille échelonnée) : le rang de cette matrice, et donc de M, est égal à $n - 1$.

Ainsi,

- Si $x = 0$, $\operatorname{rg} M = 1$.
- Si $x = -\frac{n(n+1)}{2}$, $\operatorname{rg} M = n - 1$.
- Sinon, $\operatorname{rg} M = n$.

Exercice 3 1. Écrivons l'égalité $\det(A + M) = \det A + \det M$, vraie pour toute matrice M, avec $M = A$: cela donne $\det(2A) = 2 \det A$, ou encore $2^n \det A = 2 \det A$. Comme $n \geqslant 2$, on a $2^n \neq 2$, et cela implique donc $\det A = 0$.

2. Si $C \neq 0$, alors on a aussi $-C \neq 0$. Voyant $-C$ comme un élément de $\mathbf{R}^n$, le théorème de la base incomplète dit qu'on peut compléter la famille $(-C)$ en une base $(-C, C_2, \ldots, C_n)$ de $\mathbf{R}^n$. La matrice dont les colonnes sont $-C, C_2, \ldots, C_n$ est alors inversible.

3. Supposons encore $C \neq 0$, et notons M la matrice inversible obtenue dans la question précédente. Par construction de M, la première colonne de la matrice $A + M$ est nulle : cela montre que $\det(A + M) = 0$. Par ailleurs, on a montré que $\det A = 0$, de sorte que l'égalité $\det(A + M) = \det A + \det M$ devient $0 = \det M$. Cela contredit le fait que M est inversible.

Cela montre donc que la première colonne de A est non nulle. En refaisant exactement le même raisonnement avec les autres colonnes de A, on conclut finalement que $A = 0$.