FEUILLE 5, EXERCICE 10

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On calcule $P_M(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ avec $\begin{cases} \alpha = a-b \\ \beta = a+b+\sqrt{2}c \\ \gamma = a+b-\sqrt{2}c \end{cases}$

On discute selon le nombre de valeurs propres distinctes.

① Si les trois sont distinctes, alors M est diagonalisable.

② Sinon, on peut avoir $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

ⓐ $\underline{\alpha = \beta}$ $\Leftrightarrow a-b = a+b+\sqrt{2}c \Leftrightarrow c = -\sqrt{2}b$ ⊛

Dans ce cas, ou bien $\gamma = \alpha \, (=\beta)$, ou bien $\gamma \neq \alpha \, (=\beta)$.

• Si $\gamma = \alpha$, alors $a+b-\sqrt{2}c = a-b$, d'où $c = \sqrt{2}b$.

Compte tenu de ⊛, on a donc $b=0$ puis $c=0$.

Alors $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable.

• Si $\gamma \neq \alpha$, on a $\mathrm{mult}(\alpha) = 2$ et $\mathrm{mult}(\gamma) = 1$

Forcém^t $\dim E_\gamma = 1$. Regardons $\dim E_\alpha = \dim E_{a-b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{a-b} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy + bz = (a-b)x \\ cx + (a+b)y + cz = (a-b)y \\ bx + cy + az = (a-b)z \end{cases}$$

$c = -\sqrt{2}b$ d'après ⊛

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +bx - \sqrt{2}by + bz = 0 \\ -\sqrt{2}bx + 2by - \sqrt{2}bz = 0 \\ bx - \sqrt{2}by + bz = 0 \end{cases}$$

• $b \neq 0$ sinon $b=0$, $c=0$ et alors $\alpha = \gamma$

• Les éqs sont toutes proportionnelles.

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{2}y + z = 0$$

Équation de plan, donc $\dim E_{a-b} = 2 = \mathrm{mult}(a-b)$

$\rightarrow$ M est diagonalisable.

ⓑ $\underline{\alpha = \gamma}$ se traite de la même façon.

ⓒ $\underline{\beta = \gamma}$ $\Leftrightarrow a+b+\sqrt{2}c = a+b-\sqrt{2}c \Leftrightarrow c = 0$

• Si $\alpha = \beta$, alors [...] $b=0$ d'où $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$: diag^{ble}.

- <u>Si $\alpha \neq \beta$</u>, càd si $b \neq 0$, alors $\text{mult}(a-b) = 1$ et $\text{mult}(a+b+\sqrt{2}c)$
$= \text{mult}(a+b)$
$= 2$

On, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{a+b} \iff [\dots] \iff bz = bx \underset{\text{car } b\neq 0}{\iff} z = x$

Équation de plan, donc $\dim E_{a+b} = 2$

Donc M diagonalisable.

$\boxed{\text{Conclusion : } M \text{ est diagonalisable pour tous } a, b, c \in \mathbb{C}.}$