Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2018-2019

Mathématiques III - Cursus préparatoire 2A — 12 novembre 2018. Durée : 1 h 30

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}$.

1. Donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ ;} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Vérifier que $t^2+t+1 > 0$ pour tout réel t. En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 3. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \text{ ;} \\ -\sin(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Soit a un réel, on étudie la continuité de f en (a,a).

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Soient x et y deux réels distincts. Vérifier qu'il existe z compris entre x et y tel que $f(x,y) = -\sin z$.
   (b) Avec les notations de la question précédente, vérifier que $|z-a| \leq \big\|(x,y)-(a,a)\big\|$.
   (c) Justifier qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que pour tout réel x tel que $|x-a| \leq \beta$, on a $\big|-\sin x - f(a,a)\big| \leq \varepsilon$.
   (d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un point tel que $\big\|(x,y)-(a,a)\big\| \leq \beta$. Démontrer que
   $$\big|f(x,y) - f(a,a)\big| \leq \varepsilon.$$
   On distinguera deux cas selon que $x = y$ ou que $x \neq y$.
2. Montrer enfin que f est continue en (a,a).

Exercice 4. $\simeq 4$ *points.*

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension du noyau de A ?
2. En déduire qu'il existe un réel α tel que le polynôme caractéristique de A soit $\chi_A(X) = X^3(X-\alpha)$.
3. Dans le cas d'une matrice B carrée de taille n, rappeler la formule donnant a_n, a_{n-1} et a_0 dans l'expression $\chi_B(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. En déduire la valeur de α.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. $\simeq 4$ *points.*

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice B.
2. Justifier qu'elle est diagonalisable.
3. Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.

Exercice 6. $\simeq 6$ *points - donc 4 points bonus.*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E et $\{0_E\}$ sont les seuls sous-espaces stables par u.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que u n'a aucune valeur propre.
2. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.
   (a) Montrer que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a : $u^p(x) \notin \mathrm{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$.
   (b) En déduire que $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. *Indication : on pourra effectuer une récurrence sur le p défini précédemment.*
   (c) Donner la forme de la matrice de u dans cette base.
3. Montrer que la matrice de u dans une base de la forme $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ ne dépend pas du choix de x non nul.