

**Feuille d'exercices n° 6**

POLYNÔMES ANNULATEURS ET POLYNÔME MINIMAL

**Exercice 1.** Soit  $P$  un polynôme annulateur d'un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$ .

1. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  alors  $P(\lambda) = 0$ .
2. Montrer que si  $f$  vérifie  $f^3 + 2f^2 - f - 2\text{Id} = 0$  alors  $f$  est bijectif. Analyser les cas  $\dim(E)$  finie et infinie.

**Exercice 2.** Soit  $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'endomorphisme défini par  $T(P) = P(1 - X)$ .

1. Vérifier que  $T^2 = \text{Id}$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $T$ .

**Exercice 3.** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur  $P$  de  $f$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ . Montrer que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires dans  $E$ . On pourra supposer que  $P'(0) = 1$ .

**Exercice 4.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ . On suppose connus deux polynômes  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$  annulateurs de  $A$  et  $B$  respectivement. Exprimer en fonction de  $P$  et  $Q$  un polynôme annulateur de  $M$ .

**Exercice 5.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices réelles carrées d'ordre  $n$  telles qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad AB = P(A).$$

Montrer que  $A$  est inversible et que  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\mathbb{K}[A]$  l'ensemble  $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

1. Montrer que pour toutes matrices  $B$  et  $C$  dans  $\mathbb{K}[A]$ , le produit  $BC$  est encore dans  $\mathbb{K}[A]$  et que  $B$  et  $C$  commutent.
2. (a) Montrer que  $\mathbb{K}[A]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
 (b) On note  $d$  le degré du polynôme minimal de  $A$ . Montrer que la famille  $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$  est libre. Par un argument de division euclidienne, montrer que cette famille engendre  $\mathbb{K}[A]$ . En déduire la dimension de  $\mathbb{K}[A]$ .

**Exercice 7.** Soient  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $p$  un entier naturel non nul tels que  $B = A^p$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $B$  l'est.

**Exercice 8.** Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où  $a \neq b$  :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $P_M$  son polynôme caractéristique et  $m_M$  son polynôme minimal. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P_{A-\alpha I} = P_A(X - \alpha),$
2.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P_{A-\alpha I} = P_A(X + \alpha),$
3.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad m_{A-\alpha I} = m_A(X - \alpha),$
4.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad m_{A-\alpha I} = m_A(X + \alpha).$

**Exercice 10.** Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ .

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de  $u$  est  $P_u = X^n$ . Comment procéder à l'aide du polynôme minimal? Montrer que le résultat est encore vrai si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base  $B$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans une certaine base  $B$  est triangulaire avec une diagonale nulle, est nilpotente de degré  $p \leq n$ .

On rappelle que le degré de nilpotence de  $u$  est le plus petit entier  $p$  tel que  $u^p = 0$  et  $u^{p+1} \neq 0$ .

**Exercice 11.** Soit  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  l'application qui à  $P$  associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 - 1$ . Montrer que  $u$  est linéaire. Déterminer  $u^2$  et en déduire que  $u$  est diagonalisable.

**Exercice 12.** Soit  $u$  un endomorphisme inversible d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  où l'on suppose que  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Montrer que 0 ne peut pas être une valeur propre de  $u$ .
2. En déduire que  $u^{-1}$  est un polynôme en  $u$ .

**Exercice 13.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que  $P$  est premier avec le polynôme minimal  $m_u$  de  $u$  si et seulement si l'endomorphisme  $P(u)$  est inversible.

**Exercice 14.** Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que la restriction de  $u$  à  $F$  (considérée comme un endomorphisme de  $F$ ) est diagonalisable.

**Exercice 15.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ . Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u$  tels que  $E = F \oplus G$ . Notons  $m_F$  et  $m_G$  les polynômes minimaux respectifs des restrictions de  $u$  à  $F$  et  $G$ . Montrer que le polynôme minimal de  $u$  est égal à  $\text{ppcm}(m_F, m_G)$ .

**Exercice 16.**

1. Soit  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $J^p$  pour tout  $p$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .
- En déduire que  $J$  est diagonalisable.
- Montrer que  $I_n, J, \dots, J^{n-1}$  sont linéairement indépendants.
- Déterminer le polynôme minimal de  $J$ .
- Calculer les valeurs propres de  $J$ .
- Diagonaliser  $J$  en exhibant une matrice de passage.

2. Soit  $A$  la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

- Exprimer  $A$  comme polynôme en la matrice  $J$ .
- Montrer que pour tout polynôme complexe  $Q$ ,  $Q(J)$  est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est  $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$ .
- En déduire que  $A$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Calculer le déterminant de  $A$ .

**Exercice 17.** Résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'équation  $X^3 = X$ .

**Exercice 18.** L'objectif est de résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'équation

$$(\star) \quad X^3 + X = 0.$$

Soit  $A$  non nulle satisfaisant  $(\star)$ . On considère  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \text{Id})$ .
- Déterminer le polynôme minimal de  $u$ .
- Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^3$  n'appartient pas au noyau de  $u$  alors  $(x, u(x))$  est libre.
- Montrer que  $\ker(u)$  est de dimension 1. En déduire que  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Conclure.

**Exercice 19.**

1. (a) Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $x, y \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que les matrices  $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  sont semblables.  
(b) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que si  $A$  et  $B$  ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, alors elles sont semblables.
2. Dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ , on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer leurs rangs, leurs polynômes caractéristiques et leurs polynômes minimaux. Sont-elles semblables ?

3. (difficile) Dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , deux matrices ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal sont-elles semblables ?

**Exercice 20.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit cyclique lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que la famille  $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

1. Soit  $u$  un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question précédente.  
(b) En déduire que pour tout polynôme unitaire  $Q \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ , il existe un endomorphisme cyclique  $u$  de  $E$  dont le polynôme caractéristique est  $Q$ .
3. Soit  $u$  un endomorphisme cyclique. Montrer que le polynôme minimal de  $u$  est égal à son polynôme caractéristique.