Université Claude Bernard Lyon 1 François LÊ
Maths III PMI — Algèbre fle@math.univ-lyon1.fr

# Corrigé de l'exercice 3, feuille n° 3

> **Commentaire**
> Rappelons qu'une application linéaire sur $E$ est entièrement définie par les images des vecteurs d'une base de $E$ ; c'est bien le cas ici pour l'application $u$. En définissant comme cela une application linéaire, on n'a pas directement l'expression de $u(x)$ pour un vecteur $x$ quelconque de $E$. Pour trouver cette expression, on commence par décomposer $x$ sur la base $\mathcal{B}$ : il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n$ tels que
>
> $$x = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n.$$
>
> Puis, par linéarité de $u$, on a
>
> $$u(x) = \lambda_1 u(f_1) + \cdots + \lambda_m u(f_m) + \mu_1 u(g_1) + \cdots + \mu_n u(g_n).$$
>
> Cette expression montre que $u(x)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base, c'est-à-dire par les valeurs des $u(f_i)$ et des $u(g_j)$. Dans le cas de l'exercice, on a donc :
>
> $$u(x) = 2\lambda_1 f_1 + \cdots + 2\lambda_m f_m + 3\mu_1 g_1 + \cdots + 3\mu_n g_n.$$

0. Montrons d'abord que $F = \{x \in E \mid u(x) = 2x\}$. Soit donc $x \in F$ : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que $x = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$. On a alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda_1 u(f_1) + \cdots + \lambda_m u(f_m) \\ &= \lambda_1 \cdot 2f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot 2f_m \\ &= 2(\lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_m f_m) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Cela montre que $F \subset \{x \in E \mid u(x) = 2x\}$.

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $u(x) = 2x$. En écrivant $x$ comme dans les commentaires du haut de cette feuille, on a :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n \\ u(x) = 2\lambda_1 f_1 + \cdots + 2\lambda_m f_m + 3\mu_1 g_1 + \cdots + 3\mu_n g_n \end{cases}$$

Donc, si $u(x) = 2x$, on en déduit que

$$2\lambda_1 f_1 + \cdots + 2\lambda_m f_m + 3\mu_1 g_1 + \cdots + 3\mu_n g_n = 2\lambda_1 f_1 + \cdots + 2\lambda_m f_m + 2\mu_1 g_1 + \cdots + 2\mu_n g_n,$$

d'où

$$\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n = 0.$$

Comme la famille $(g_1, \dots, g_n)$ est une sous-famille de la base $\mathcal{B}$, elle est libre et donc on a $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, puis

$$x = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m.$$

Ainsi $x \in E$, ce qui montre que $\{x \in G \mid u(x) = 2x\} \subset E$. L'égalité annoncée est donc démontrée. De la même façon, on peut bien sûr montrer que $F = \{x \in G \mid u(x) = 3x\}$.

François LÊ
fle@math.univ-lyon1.fr

1. Supposons d'abord que $u$ et $v$ commutent, et montrons que $F$ et $G$ sont stables par $v$. Soit donc $x \in F$ et montrons que $v(x) \in F$. Vu ce qui précède, il suffit pour cela de montrer que $u(v(x)) = 2v(x)$. Or, comme $x \in F$, on a $u(x) = 2x$ et donc $v(u(x)) = 2v(x)$, et puisque $u$ et $v$ commutent, on a $u(v(x)) = 2v(x)$. Ainsi, $v(x) \in F$ et donc $F$ est stable par $v$. On montre exactement de la même façon que $G$ est stable par $v$.

Réciproquement, supposons que $F$ et $G$ sont stables par $v$, et montrons que $u \circ v = v \circ u$. Comme un endomorphisme est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base, il suffit de montrer que les deux endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Or, pour $i \in [\![1, m]\!]$, on a d'une part

$$v \circ u(f_i) = v(2f_i) = 2v(f_i),$$

et d'autre part, par stabilité de $F$, on sait que $v(f_i) \in F$. Vu ce qui précède, cette dernière propriété implique que $u(v(f_i)) = 2v(f_i)$. On a donc bien

$$v \circ u(f_i) = u \circ v(f_i).$$

De la même façon on peut montrer que $v \circ u(g_j) = u \circ v(g_j)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Finalement, $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur tous les vecteurs de base, donc ils coïncident tout court.

2. a) Si $x \in F$, alors on a $p(x) = 3x - u(x) = x$ car on a vu que $u(x) = 2x$. Par ailleurs, si $x \in G$, alors on a $p(x) = 3x - 3x = 0$. Cela montre que $p$ est la projection sur $F$ parallèlement à $G$ (puisqu'on a $E = F \oplus G$, $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$).

De même, on montre que $q$ est la projection sur $F$ parallèlement à $E$.

2. b) On peut remarquer que $p(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im} p = F$ et que $q(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im} q = G$. Par conséquent, $p(S) \cap q(S) \subset F \cap G = \{0\}$, puisque $F$ et $G$ sont en somme directe. Cela montre que $p(S)$ et $q(S)$ sont en somme directe.

Soit maintenant $x \in S$. Alors on a $p(x) + q(x) = 3x - u(x) + u(x) - 2x = x$. On a donc écrit $x = p(x) + q(x)$, ce qui montre que $x \in p(S) \oplus q(S)$. Ainsi, $S \subset p(S) \oplus q(S)$.

Pour le contre-exemple, prenons $E = \mathbf{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $S = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$, où $e_1$ et $e_2$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On peut alors vérifier que $p(S) = F$ et $q(S) = G$, et donc que $p(S) \oplus q(S) = \mathbf{R}^2$. On a donc $S \subsetneq p(S) \oplus q(S)$.

2. c) Soit $x \in S$. Alors on a $p(x) = 3x - u(x)$. Comme $S$ est stable par $u$, on a $u(x) \in S$ et donc $p(x) = 3x - u(x) \in S$. Ainsi, $p(S) \subset S$. De même, on montre que $q(S) \subset S$.

On déduit de ces deux inclusions que $p(S) + q(S) \subset S$. Or, on a vu dans la question précédente que la somme $p(S) + q(S)$ est directe et que $S \subset p(S) \oplus q(S)$. Finalement, $S = p(S) \oplus q(S)$.

2. d) Supposons que $S$ est stable par $u$. Vu ce qui précède, en posant $M = p(S)$ et $N = q(S)$, on a $S = M \oplus N$. Défini ainsi, $M$ (resp. $N$) est un sous-espace vectoriel de $F$ (resp. $G$), comme on l'a vu en 2. b).

Réciproquement, supposons que $S = M \oplus N$ avec $M$ et $N$ sous-espaces respectifs de $F$ et $G$. Comme $u_F = 2\,\mathrm{id}_F$ et $M \subset F$, on a $u(M) = M$ et en particulier, $M$ est stable par $u$. De même, $N$ est stable par $u$. Par conséquent, $S = M \oplus N$ est stable par $u$.

3. Notons $S$ le sous-espace stable sur lequel $v$ est défini. Vu la question précédente, on peut écrire $S = M \oplus N$ avec $M$ et $N$ sous-espaces de $F$ et $G$ respectivement.

Comme $M \subset E$, tous les éléments $x$ de $M$ vérifient $v(x) = u(x) = 2x$, et de même, tous les éléments $x$ de $N$ vérifient $v(x) = 3x$. Considérons maintenant une base de $S$ adaptée à la décomposition $S = M \oplus N$ :

$$\mathcal{C} = (\mu_1, \ldots, \mu_a, \nu_1, \ldots, \nu_b),$$

avec $a = \dim M$ et $b = \dim N$. Alors la matrice de $v$ dans cette base $\mathcal{C}$ est diagonale, égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\det v = 2^a 3^b$.

4. Soit $S$ un sous-espace stable par $u$. D'après la question 2, il existe $M$ et $N$ sous-espaces respectifs de $F$ et $G$ tels que $S = M \oplus N$.

Considérons maintenant $M'$ (resp. $N'$) un supplémentaire de $M$ (resp. $N$) dans $F$ (resp. $G$), et posons $S' = M' + N'$. Montrons que $E = S \oplus S'$. En effet :

- $S + S' = (M + N) + (M' + N') = (M + M') + (N + N') = F + G = E$.
- Soit $x \in S \cap S'$. Comme $x \in S = M \oplus N$, on peut écrire $x = m + n$ avec $m \in M$ et $n \in N$. De même, on peut écrire $x = m' + n'$ avec $m' \in M'$ et $n' \in N'$. On a donc

  $$m + n = m' + n', \qquad \text{d'où} \qquad m - m' = n' - n.$$

  Or, on a $m - m' \in F$ et $n - n' \in G$. L'élément $m - m'$, égal à $n' - n$, appartient donc à $F \cap G = \{0\}$. Ainsi, on a

  $$m = m' \in M \cap M' \qquad \text{et} \qquad n = n' \in N \cap N'.$$

  Mais $M \cap M' = \{0\}$ et $N \cap N' = \{0\}$, de sorte que $m = n = 0$ et finalement $x = 0$. CQFD