Feuille d'exercices n° 2

SOUS-ESPACE ORTHOGONAL ET PROJECTEUR

Exercice 1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$.
Indication : concernant $\dim(F^\perp)$, on pourra considérer l'application $(E \to \mathbb{R}^m; x \mapsto (< x, b_1 >, \dots, < x, b_m >))$, les b_i formant une base orthonormée de F.

Exercice 2 (Sur les projecteurs)**.** Soit $p : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

– On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.
– Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G si pour tout $(f, g) \in F \times G$, $p(f + g) = f$.

1. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $E = \mathrm{Im(p)} \oplus \ker(\mathrm{p})$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im(p)}$ parallèlement à $\ker(p)$.
2. On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p est un projecteur.

On suppose maintenant que E est muni d'un produit scalaire. On dit que p est un projecteur orthogonal s'il existe un sous-espace F tel que p soit la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et s. si : $\forall (x, y) \in \mathrm{Im(p)} \times \ker(\mathrm{p}),\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$.

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E. Démontrer l'équivalence suivante : p est un projecteur orthogonal $\iff$ pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 4. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $p : E \to E$ un projecteur. On suppose que p satisfait : $\forall x \in E,\ \langle p(x), x \rangle \geq 0$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{Im(p)} \subseteq \mathrm{Im(q)}$,
2. pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 6. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, avec $n = \dim E$. On appelle projecteur orthogonal sur F la projection p_F sur F selon la somme directe : $E = F \oplus F^\perp$, en d'autres termes, pour $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

1. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base orthonormale de F. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) =< x, v_1 > v_1 + \cdots + < x, v_p > v_p.$$

2. Soit $F = \text{Vect}(v)$ de dimension 1. Montrer que $p_F(x) := p_v(x) = \frac{<x,v>}{<v,v>} v$.
3. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E. On construit : $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - p_{u_1}(v_2)$, $u_3 = v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$, $\dots$, $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{u_j}(v_k)$, $\dots$.
Enfin, on pose pour tout i, $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. Montrer que les e_i forment une base orthonormale de E.
4. Appliquer ce procédé au cas de la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Exercice 7. On se donne $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ pour lesquelles la matrice de p_F est $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 8. Dans le plan réel, on considère un triangle ABC. On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, AC et AB et on note θ l'angle $\widehat{ACB}$. Montrer l'égalité suivante (dite de Al-Kashi (1380-1429), ou loi des cosinus) :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta).$$
En déduire le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.

Exercice 9 (Révision de cours)**.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf_{y\in F} d(x, y)$. Montrer que
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$
On note H l'hperplan suivant : $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 11. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose
$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E \mid \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 0\}$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^6$, soit $H = \{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = (1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H.

Exercice 13. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N.

0. Vérifier que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tM \cdot N)$.
1. Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA\rangle = \langle S, A\rangle$.
   En déduire que $\langle S, A\rangle = 0$.
2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
3. On sait alors (voir par exemple l'ex. 2) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 14. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter
   $$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b\sin(t) - c\cos(t))^2 dt$$
   comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
3. En déduire l'expression de a, b et c en fonction de f pour lesquels l'inf précédent est atteint.
4. Application : Détrminer a, b, c pour $f(t) = t$.