Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 12 avril 2017

Devoir surveillé n° 3
Corrigé

Exercice 1 (4 pts) Soit $M = f(0) + 1$. Comme d'une part $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A < 0$ tel que, pour tout $x \leqslant A$, $f(x) \geqslant M$. D'autre part, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant M$. Comme f est continue sur le segment $[A; B]$, $f_{|[A;B]}$ est bornée et atteint ses bornes : il existe $m \in \mathbb{R}$ et $x_m \in [A; B]$ tels que $f(x_m) = m$ et, pour tout $x \in [A; B]$, $f(x) \geqslant m$.
Montrons que m est un minimum global de f. D'après ce qui précède, nous savons déjà que, pour tout $x \in [A; B]$, $f(x) \geqslant m$. De plus, comme $f(0) \geqslant m$ (car $0 \in [A; B]$), et comme $M > f(0)$, nous avons que $M > m$. Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; A] \cup [B; +\infty[$, $f(x) \geqslant M > m$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant m$ et il existe $x_m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_m) = m$. Ceci prouve que m est un minimum global de f.

Exercice 2

1. **(2 pts)** Comme les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\cos(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi; \pi]$, on peut intégrer par parties. Alors,

$$\begin{aligned} I &= [-x\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \times (-\cos(x))\, dx \\ &= \pi - (-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx \\ &= 2\pi + [\sin(x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

2. **(2 pts)** Commençons par remarquer que $X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. En particulier, $\frac{2X}{X^2 + X + 1}$ est un élément simple de $\mathbb{R}[X]$.

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{-1}{x^2+x+1}\ dx \\
&= \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\ dx \\
&= \ln(3) - \ln(1) - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\ dx \\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\ dx \\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

3. **(2 pts)** Comme $x \mapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi/4]$, on peut effectuer le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} u = \tan(x) \\ du = (1+\tan^2(x))dx = (1+u^2)dx \end{array}\right.$. De plus, pour $x \in [0;\pi/4]$, nous avons :

$$
\frac{2\sin(x)}{\cos(x)+\cos^2(x)\sin(x)} = \frac{2}{\frac{1}{\tan(x)}+\frac{1}{1+\tan^2(x)}}.
$$

On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
K &= \int_0^1 \frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{1+u^2}}\frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2}{\frac{1+u^2}{u}+1}\ du \\
&= \int_0^1 \frac{2u}{u^2+u+1}\ du \\
&= J
\end{aligned}
$$

On a alors, d'après la question précédente, $K = \ln(3) - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 3

1. (a) **(1 pt)** Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 2\left(2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x}\right) \\ &= -4x\ln(x) \end{aligned}$$

(b) **(2 pts)**

- D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$. Donc g est continue en 0.
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ (et en particulier cette limite existe).

D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, nous pouvons dire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $g'(0) = 0$.

(c) **(1 pt)** Pour $x > 0$, $1 + x^2 - 2x^2\ln(x) = 1 + x^2\ln(x)\left(\frac{1}{\ln(x)} - 2\right)$. Il vient alors que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

(d) **(1 pt)** D'après les questions 1.(a) et (b), nous savons que, pour tout $x \in]0;1[$, $g'(x) > 0$ et, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g'(x) < 0$. Nous pouvons donc en déduire le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(e) **(1,5 pt)** D'après le tableau de variation précédent, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) \geqslant 1 > 0$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un unique $m \in [1;+\infty[$ tel que $g(m) = 0$.

- Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g'(x) < 0$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.
- g est continue sur $[1;+\infty[$.
- $g(1) = 2 > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $m \in [1;+\infty[$ tel que $g(m) = 0$.

(f) **(0.5 pt)** On déduit des deux questions précédentes le tableau de signe suivant :

x	0		m		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

2. (a) **(1 pt)** La fonction f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$. En conséquence, f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln(x) \times 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)}{x(1+x^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(b) **(1 pt)** En 0, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$, le théorème de croissances comparées donne que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(c) **(1 pt)** Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. On peut donc établir le tableau de variation suivant :

x	0		m		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
varitations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	0

(d) **(1 pt)** L'allure de la courbe représentative de f est :