Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 12 avril 2017

Devoir surveillé CCP n° 3
Corrigé

Exercice 1

1. On sait d'après le cours que

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

On a donc $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$. En divisant numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$ ($\neq 0$ puisque $a, b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$), on obtient

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a}\dfrac{\sin b}{\cos b}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

2. Posons $a = \operatorname{Arc}\tan x$ et $b = \operatorname{Arc}\tan y$. Comme $x, y \in \left]-1, 1\right[$, on a $a, b \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et donc $a + b \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. La question 1 donne

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{x+y}{1-xy},$$

et donc

$$\operatorname{Arc}\tan(\tan(a+b)) = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Comme $a + b \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arc}\tan(\tan(a+b)) = a + b = \operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan y$. Il vient donc

$$\boxed{\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan y = \operatorname{Arc}\tan \frac{x+y}{1-xy}}$$

3. Remarquons déjà que la formule proposée est vraie au rang $n = 1$, puisque par définition, on a $S_1 = \operatorname{Arc}\tan(1/2)$. Fixons maintenant un entier $n \geqslant 1$, et supposons que la formule proposée soit vraie au rang n. On a alors

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2k^2} + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2(n+1)^2} = S_n + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$S_{n+1} = \operatorname{Arc}\tan \frac{n}{n+1} + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

En utilisant la formule trouvée dans la question précédente, on en déduit que

$$S_{n+1} = \operatorname{Arc}\tan \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{2(n+1)^2}} = \operatorname{Arc}\tan \frac{2n(n+1)^2 + n + 1}{2(n+1)(n+1)^2 - n}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est égal à $(n+1)(2n(n+1)+1) = (n+1)(2n^2+2n+1)$. Le dénominateur est quant à lui égal à $2(n^3+3n^2+3n+1) - n = 2n^3+6n^2+5n+2 = (n+2)(2n^2+2n+1)$. Par conséquent, il vient

$$S_{n+1} = \operatorname{Arc}\tan \frac{n+1}{n+2},$$

ce qui montre que la formule cherchée est vraie au rang $n+1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. On sait que $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, $S_n \to \operatorname{Arc}\tan(1)$ lorsque $n \to +\infty$ (par continuité de la fonction Arc tan en 1), c'est-à-dire que

$$\boxed{S_n \to \frac{\pi}{4} \text{ lorsque } n \to +\infty.}$$

Exercice 2

1. Faisons une première intégration par parties en posant $u' = \cos nt$ et $v = -t + \frac{t^2}{2\pi}$ (donc $u = \frac{\sin nt}{n}$ et $v' = -1 + \frac{t}{\pi}$), de sorte que

$$J_n = \left[\frac{\sin nt}{n}\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(-1 + \frac{t}{\pi}\right)\sin nt \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(-1 + \frac{t}{\pi}\right)\sin nt \,\mathrm{d}t.$$

Refaisons une intégration par parties, en posant cette fois $u' = \sin nt$ et $v = -1 + \frac{t}{\pi}$ (donc $u = -\frac{\cos nt}{n}$ et $v' = \frac{1}{\pi}$) :

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{n}\left(\left[-\frac{\cos nt}{n}\left(-1 + \frac{t}{\pi}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nt \,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(0 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi\right). \end{aligned}$$

Le dernier crochet étant nul, on obtient finalement

$$\boxed{J_n = \frac{1}{n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.}$$

2. (a) On sait que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ et que $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$. En effectuant la demi-somme de ces deux équations, on obtient donc

$$\frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) = \sin a \cos b.$$

Appliquons cette égalité avec $a = \frac{nt}{2}$ et $b = (\frac{n+1}{2})t$: sachant qu'on a alors $a + b = (n + \frac{1}{2})t$ et $a - b = -\frac{t}{2}$, cela donne

$$\boxed{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\frac{t}{2}\right]}$$

2. (b) La somme $e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} (car $e^{kit} = (e^{it})^k$ pour tout k) et de premier terme e^{it}. Comme la raison est un nombre différent de 1, on a donc

$$e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit} = e^{it}\frac{e^{nit} - 1}{e^{it} - 1}.$$

Dans la fraction obtenue, mettons $e^{nit/2}$ en facteur au numérateur et $e^{it/2}$ au dénominateur :

$$e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit} = e^{it}\frac{e^{nit/2}(e^{nit/2} - e^{-nit/2})}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})}.$$

Dans les parenthèses obtenues, on reconnaît $2i\sin(nit/2)$ et $2i\sin(t/2)$; en simplifiant par ailleurs les exponentielles restantes, on obtient donc

$$\boxed{e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit} = e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t} \times \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}}$$

2. (c) Sachant que $\mathrm{Re}(e^{it}+e^{2it}+\cdots+e^{nit}) = \mathrm{Re}(e^{it})+\mathrm{Re}(e^{2it})+\cdots+\mathrm{Re}(e^{nit}) = \cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt$, prendre la partie réelle de l'égalité obtenue dans la question précédente donne

$$\cos t + \cos 2t + \cdots \cos nt = \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\ t\right)\frac{\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}$$

En utilisant maintenant la formule démontrée en question 2(a), on obtient

$$\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\frac{t}{2}\right]}{\sin\dfrac{t}{2}},$$

d'où finalement

$$\boxed{\cos(t) + \cos(2t) + \cdots + \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\dfrac{t}{2}}}$$

3. La fonction f proposée est le quotient de deux fonctions continues sur $]0\,,\pi]$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle : c'est donc une fonction continue sur $]0\,,\pi]$. En écrivant que

$$f(t) = \frac{-t}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}} = -2\frac{t/2}{\sin(t/2)} + \frac{t}{\pi}\frac{t/2}{\sin(t/2)}$$

et en utilisant le fait que $\frac{\sin u}{u} \to 1$ quand $u \to 0$, on voit que $f(t) \to -2+0 = -2$ quand $t \to 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut se prolonger en une fonction continue sur } [0\,,\pi].}$$

Remarque : on peut aussi raisonner avec des équivalents, en remarquant qu'on a $f(t) \sim \dfrac{-t}{t/2} = -2$ *lorsque* $t \to 0$.

4. Comme suggéré par l'énoncé, intégrons par parties :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[-g(t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{g(0) - g(\pi)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant \left|\frac{g(0) - g(\pi)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^\pi g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|g(0)|+|g(\pi)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^\pi g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$

Or, on a

$$\left|\int_0^\pi g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|g'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi |g'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

puisque cos est borné (en valeur absolue) par 1. Il vient donc

$$|u_n| \leqslant \frac{|g(0)|+|g(\pi)|+\int_0^\pi |g'|}{n+\frac{1}{2}}.$$

Le numérateur du membre de droite ne dépend pas de n, ce qui montre que ce membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Finalement, on en déduit que $|u_n| \to 0$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ tend vers 0 quand } n \to +\infty.}$$

5. D'après la question 1, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \cos(kt)\, \mathrm{d}t.$$

Intervertissons les symboles de somme et d'intégrale, et sortons de la somme ce qui ne dépend pas de k :

$$S_n = \int_0^{\pi} \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\, \mathrm{d}t.$$

D'après la question 2.(c), cela peut encore s'écrire

$$S_n = \int_0^{\pi} \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right) \mathrm{d}t,$$

d'où

$$S_n = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t = I_1 + I_2.$$

D'après les questions 3 et 4, l'intégrale I_2 tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$: en effet, la fonction $t \mapsto \frac{\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$ peut se prolonger en une fonction continue sur $[0\,, \pi]$, de sorte que le résultat de la fonction 4 peut être utilisé. Cela montre donc que la suite (S_n) converge, et que $S_n \to I_1$ lorsque $n \to +\infty$. Il reste à calculer :

$$I_1 = -\frac{1}{2} \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En conclusion, on a montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Remarque : vous montrerez l'année prochaine que pour tout $k \geqslant 2$, la suite de terme général $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}$ est convergente. Lorsque k est un nombre pair (comme dans ce problème), on sait facilement trouver des formules pour les limites en question, un peu analogues à celle démontrée ici. Mais lorsque k est impair, ce n'est pas du tout le cas : aujourd'hui encore, les chercheurs en mathématiques se posent des questions sur ces limites !