Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie algèbre

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique donné par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$.
On définit $f : E \to E$ par $f(M) = {}^tM$.

1. Montrer que pour $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in E$, on a $\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij}$.
2. Montrer que f est auto-adjoint. En déduire que f est diagonalisable.
3. Dans cette partie, $n = 2$.
   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E constituée de : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de f. *Indication : on devra trouver un polynôme de la forme* $(X - \lambda_1)^3(X - \lambda_2)$.
   (c) Déterminer une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f. *Indication : remarquer que M_1 et M_4 sont des vecteurs propres.*
   (d) Déterminer la matrice de f relativement à la base trouvée à la question précédente.
4. Dans cette partie, n est supposé quelconque.
   (a) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\lambda \in \{1, -1\}$.
   (b) Montrer que l'espace propre E_1 est l'espace des matrices symétriques et que E_{-1} est l'espace des matrices antisymétriques. *Ceci montre par la même occasion que* 1 *et* -1 *sont bien des valeurs propres.*
   (c) Soient $\mathcal{B}_S$ une base orthonormée de E_1 et $\mathcal{B}_A$ une base orthonormée de E_{-1}. Justifier que de telles bases existent et justifier que la famille $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_A$ est une base orthonormée de E.
   (d) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_A$.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme non nul d'un espace euclidien E. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^* \circ f = \alpha \cdot \mathrm{Id_E}$.

1. Montrer que $\alpha > 0$.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal g de E tel que $f = \sqrt{\alpha} \cdot g$.

Partie analyse

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$\begin{aligned} u_n : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{\sqrt{n}} e^{-xn^{1/4}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de cette série de fonctions sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions converge normalement sur $[a, +\infty[$, et en déduire que sa somme S est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Soit $x > 0$. Montrer l'encadrement
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{t}} e^{-xt^{1/4}} \, \mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{t}} e^{-xt^{1/4}} \, \mathrm{d}t.$$
5. En conclure que $\lim_{x \to 0} S(x) = 4$ (on pourra utiliser le changement de variable $s = xt^{1/4}$). La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$ tout entier ?

Exercice 4. Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence dans $\mathbb{C}$:

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{1+n^3}} z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \cos(n) z^n$.

Corrigé de la partie commune - Devoir numéro 3

Partie algèbre

Exercice 1. 1. Vu plusieurs fois en TD.

2. Soient $M, N \in E$. On a : $\langle f(M), N\rangle = \langle {}^tM, N\rangle = \mathrm{tr}({}^t({}^tM)N) = \mathrm{tr}(MN)$. Par symétrie $\langle f(N), M\rangle = \mathrm{tr}(NM)$. Or on sait que $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ d'où la conclusion.

3. (a) On a trivialement $f(M_1) = M_1$, $f(M_2) = M_3$, $f(M_3) = M_2$ et $f(M_4) = M_4$ ce qui donne la matrice suivante relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On écrit $P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_4)$. On développe par rapport à la dernière ligne puis la première et enfin on développe le déterminant 2×2 et au final, on trouve $P_f(X) = (X-1)^2(X^2-1) = (X-1)^3(X+1)$.

(c) Concernant la valeur propre 1, on s'intéresse au noyau de la matrice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont on voudrait une base (de cardinal 3 puisque la dimension de l'espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre). Dans cette matrice, si on désigne par C_i les colonnes, on a : $C_1 = 0$, $C_4 = 0$ et $C_2 + C_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs colonnes ${}^t(1\ 0\ 0\ 0)$, ${}^t(0\ 0\ 0\ 1)$ et ${}^t(0\ 1\ 1\ 0)$ sont dans $\ker(A - I_4)$. Ces trois vecteurs sont clairement linéairement indépendants et forment donc une base de $\ker(A - I_4)$.

Par conséquent, les vecteurs de E correspondants : M_1, M_4 et $M_2 + M_3$ forment une base de E_1.

On constate que ces trois vecteurs sont orthogonaux. Il suffit donc de les normalisés et on obtient comme base orthonormée de E_1 : M_1, M_4 et $(\sqrt{2}/2)(M_2 + M_3)$.

Maintenant, on cherche une base de $\ker(A + I_4)$ qui est égal à :

$$\ker(A + I_4) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce noyau est de dimension 1 (puisque la valeur propre -1 est de multiplicité 1). Dans cette matrice on a la relation $C_3 - C_2 = 0$ ce qui signifie que le vecteur coordonnées ${}^t(0\ 1\ -1\ 0)$ est dans $\ker(A + I_4)$. Ainsi E_1 est engendré par le vecteur $M_2 - M_3$ qu'on normalise pour obtenir $(\sqrt{2}/2)(M_2 - M_3)$.

En conclusion la base formée de M_1, M_4, $(\sqrt{2}/2)(M_2 + M_3)$ et $(\sqrt{2}/2)(M_2 - M_3)$ est une base orthonormée constituée de vecteurs propres.

(d) On obtient la matrice diagonale dont la diagonale est formée de $1, 1, 1, -1$.

4. (a) Soit λ une valeur propre de f. Soit $M \in E\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé. On a donc ${}^tM = \lambda M$. En transposant, on obtient : $M = \lambda \cdot {}^tM = \lambda^2 M$. D'où $(1-\lambda^2)M = 0$. Or $M \neq 0$ donc $1-\lambda^2 = 0$ d'où $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

   (b) Soit $M \in E$. On a $M \in E_1 \iff {}^tM = 1 \cdot M = M \iff M$ est symétrique. De la même façon, $M \in E_{-1} \iff {}^tM = -M \iff M$ est antysimétrique.

   (c) Tout espace euclidien admet une base orthonormée. C'est donc le cas de l'espace des matrices symétriques : $\mathcal{S}$. En effet, $\mathcal{S}$ est un espace euclidien car c'est un sous-espace vectoriel de E et la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}$. Les mêmes arguments permettent de justifier de l'existence d'une base orthonormée sur l'espace des matrices antisymétriques $\mathcal{A}$.

   D'autre part, d'après le th. spectral, les espaces propres sont orthogonaux deux à deux et en somme directe. Par conséquent $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_A$ est une base et elle est orthonormée.

   (d) On obtient la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de 1 en nombre égal à la dimension de $\mathcal{S}$ et de -1 en nombre égal à $\dim \mathcal{A}$.

   Rappelons que $\dim \mathcal{S} = n(n+1)/2$ et $\dim \mathcal{A} = n(n-1)/2$.

Exercice 2. 1. L'endomorphisme est non nul donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.

Pour un tel x, on a $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle f^*(f(x)), x\rangle = \langle \alpha x, x\rangle = \alpha\langle x, x\rangle$. Or, comme $f(x) \neq 0$, $\langle f(x), f(x)\rangle > 0$. De plus $\langle x, x\rangle \geqslant 0$. Par conséquent, $\alpha > 0$.

2. Il suffit de poser $g = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f$. On vérifie alors que $g^* \circ g = \mathrm{Id}_E$ et donc g est orthogonal.

Partie analyse

Exercice 3. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $n^2 u_n(x) = x^2 n^{3/2} e^{-xn^{1/4}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Ainsi, $u_n(x) = o(1/n^2)$, et donc la série $\sum u_n(x)$ est convergente, et on a bien la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable, et pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{(n)}} e^{-xn^{1/4}} \left(2 - xn^{1/4}\right),$$

donc u_n est croissante sur $\left[0, 2n^{-1/4}\right]$ et décroissante sur $\left[2n^{-1/4}, +\infty\right[$. Comme elle est en outre positive, on en déduit que

$$\|u_n\|_\infty = u_n(2n^{-1/4}) = \frac{4e^{-2}}{n},$$

qui est le terme général d'une série de Riemann divergente, donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $a > 0$. D'arpès l'étude de fonction de la question précédente, comme $2n^{-1/4} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geqslant n_0$, $2n^{-1/4} \leqslant a$ et donc u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Alors, à partir de ce rang, u_n atteint son supremum en a, et donc $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a) = a^2 n^{-1/2} e^{-an^{1/4}}$, qui est le terme général d'une série convergente d'après la question 1. Le comportement de la série dépend uniquement des termes à partir du rang n_0, d'où la convergence normale sur $[a, +\infty[$. La convergence normale implique la convergence uniforme, et donc la continuité (puisque les u_n sont continues), ainsi S est continue sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, et finalement, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto x^2 t^{-1/2} e^{-xt^{1/4}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et on peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) = u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où, en sommant sur n,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{t}} e^{-xt^{1/4}}\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{t}} e^{-xt^{1/4}}\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $x > 0$. Le changement de variable $s = xt^{1/4}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, et alors

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= 4\int_x^{+\infty} se^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= 4\left[se^{-s}\right]_x^{+\infty} + 4\int_x^{+\infty} e^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= 4(1+x)e^{-x}.\end{aligned}$$

De la même manière, $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 4$, et donc lorsque $x \to 0$, on en déduit que $S(x) \to 4$. Or, $S(0) = 0$, et donc S n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$; en particulier, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{1+n^3}}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= 2^{(n+1-n)/2}\left(\frac{1+(n+1)^3}{1+n^3}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1+3n^{-1}+3n^{-2}+n^{-3}}{1+n^{-3}}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}\end{aligned}$$

donc le critère de d'Alembert s'applique, et le rayon de convergence est égal à $1/\sqrt{2}$.

Si $z \in \mathbb{C}$ a pour module $1/\sqrt{2}$, alors $|a_n z^n| = \frac{1}{(1+n^3)^{1/2}} \sim n^{-3/2}$; c'est le terme général d'une série convergente, et donc $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi, le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1/\sqrt{2}\}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \cos(n)$. Comme (b_n) est bornée, on sait déjà que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Or, $\cos(n)$ ne converge pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et donc le rayon de convergence de la série entière ne peut être strictement supérieur à 1. Ainsi, il est égal à 1.

   Si $z \in \mathbb{C}$ est de module 1, alors $|b_n z^n| = |\cos(n)|$ ne converge pas vers 0, et en particulier, $\sum b_n z^n$ est grossièrement divergente. On en conclut que le domaine de convergence de la série entière est $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.