
Devoir surveillé n° 3, sujet CCP
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené·e à prendre.

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $a+b \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Rappeler les formules exprimant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$, et en déduire que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-(\tan a)(\tan b)}$.
2. Soient $x, y \in \left]-1, 1\right[$. Montrer que $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan y = \operatorname{Arc}\tan \dfrac{x+y}{1-xy}$.
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2k^2}$. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \operatorname{Arc}\tan \dfrac{n}{n+1}$.
4. Calculer la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose
$$J_n = \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $J_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Soient $t \in \left]0, \pi\right]$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) En commençant par chercher une formule exprimant $\sin a \cos b$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ (avec $a, b, \in \mathbf{R}$), montrer que
$$\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\ t\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\frac{t}{2}\right].$$
   (b) Montrer que $e^{it} + e^{2it} + \cdots + e^{nit} = e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t} \times \dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.
   Indication : penser à la somme des termes d'une suite géométrique.
   (c) En déduire que $\cos(t) + \cos(2t) + \cdots + \cos(nt) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$.
3. Justifier que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{-t+\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}}$ est définie et continue sur $\left]0, \pi\right]$ puis montrer qu'elle peut se prolonger en une fonction continue sur $[0, \pi]$.

4. On considère une fonction g de classe C^1 sur $[0\,,\pi]$. En commençant par effectuer une intégration par parties, montrer que la suite de terme général
$$u_n = \int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$$
tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Pour la question suivante, on admettra que ce résultat est encore valable lorsque g est seulement supposée être continue sur $[0\,,\pi]$.

5. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente, et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.