Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2016-2017

Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 — 15 mars 2017

Devoir surveillé n^{o} 2
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené·e à prendre.

Exercice 1

Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3 - 2X + 2}{X^2 + 1}$.

1. Décomposer F sur $\mathbf{R}$.
2. Décomposer F sur $\mathbf{C}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente, de limite finie l. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$v_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.

Exercice 3 Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que pour $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$, on a $\varphi(P) = 3X^2 + X + 1$.
2. Vérifier que φ est linéaire.
3. (a) Soit $P \in E$ un élément de $\mathrm{Ker}\varphi$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   (b) En déduire que les éléments de $\mathrm{Ker}\varphi$ sont les polynômes constants.
4. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbf{R}_2[X]$.
   (b) Quelles sont les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}\varphi$ et de $\mathrm{Im}\varphi$?
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\varphi = \mathbf{R}_2[X]$.
5. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. Écrire la matrice M de φ relativement à $\mathcal{B}$.
6. Soient $Q, R \in E$, respectivement de degré 2 et 3. On note C la famille $\mathcal{C} = (1, X, Q, R)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.
   (b) Déterminer tous les couples de polynômes (Q, R) avec $Q, R \in E$ de sorte que la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{C}$ soit égale à

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Soit (Q, R) satisfaisant la condition de la question précédente, et tel que $Q(0) = R(0) = 0$. Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
   (d) Quelle relation existe-t-il entre $MP_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}M'$? Justifiez.