
Devoir surveillé n° 2
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené·e à prendre.

Exercice 1

Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3 - 2X + 2}{X^2 + 1}$.

1. Décomposer F sur $\mathbf{R}$.
   Réponse : (2pts)
   On commence par déterminer la partie entière de F en posant la division euclidienne de $X^3 - 2X + 2$ par $X^2 + 1$. On trouve $X^3 - 2X + 2 = X(X^2 + 1) - 3X + 2$, ce qui conduit à $F = X + \dfrac{-3X + 2}{X^2 + 1}$. Comme $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbf{R}$, il s'agit de la décomposition en éléments simples souhaitée.
   Commentaire : 1pt pour la division euclidienne, 1pt pour la réponse finale.
2. Décomposer F sur $\mathbf{C}$.
   Réponse : (2pts)
   Sur $\mathbf{C}$, $X^2 + 1$ n'est plus irréductible, et se factorise sous la forme $(X - i)(X + i)$. On cherche donc à décomposer F sous la forme $F = X + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$, avec $a, b \in \mathbf{C}$. Comme F est à coefficients réels, on a directement $b = \bar{a}$. Par multiplication et évaluation en i, on trouve ensuite $a = -3/2 - i$, d'où $b = -3/2 + i$. Ainsi :
   $$F = X + \frac{-\frac{3}{2} - i}{X - i} + \frac{-\frac{3}{2} + i}{X + i}$$
   Commentaire : 1pt pour a, 1pt pour b, 1pt pour la réponse finale. Attention aux règles de calcul avec les nombres complexes. Attention aussi aux résultats non-simplifiés, qui peuvent engendrer des erreurs de calcul par la suite.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente, de limite finie l. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$v_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.
Réponse : (2pts)

- Première méthode : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Posons $n_1 = 2n_0$ et considérons $n \geqslant n_1$. Si n est pair, comme $n/2 \geqslant n_0$, on a $|u_{n/2} - l| < \varepsilon$ et donc $|v_n - l| < \varepsilon$. Si n est impair, comme $(n + 1)/2 \geqslant n_0$, on a $|u_{(n+1)/2} - l| < \varepsilon$ et donc $|v_n - l| < \varepsilon$. Dans tous les cas, $|v_n - l| < \varepsilon$. Cela montre que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.
- Deuxième méthode : On constate que la suite extraite $(v_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ n'est autre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et que la suite extraite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ n'est autre que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$. Ces deux suites convergent donc vers l. Par un résultat vu en TD, on déduit que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.

Commentaire : Cette question a posé beaucoup de difficultés, et a été essentiellement notée sur la qualité de la rédaction. Ainsi, des arguments dans l'esprit similaires ont parfois été notés différemment (0, 1 ou 2pts). Attention, les suites $(u_{n/2})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{(n+1)/2})_{n\in\mathbf{N}}$ ne sont pas des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (ce ne sont, d'ailleurs, même pas des suites car elles ne sont pas définies pour toutes les valeurs de n).

Exercice 3 Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que pour $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$, on a $\varphi(P) = 3X^2 + X + 1$.
   Réponse : (1pt)
   $$\begin{aligned}\varphi(P) &= (X+1)^3 - (X+1)^2 - (X+1) + 1 - (X^3 - X^2 + X - 1)\\ &= X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^2 - 2X - 1 + X + 1 - 1 - X^3 + X^2 - X + 1\\ &= 3X^2 + X + 1\end{aligned}$$
   Commentaire : Il n'y a que dans cette question que l'on suppose que $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$!
2. Vérifier que φ est linéaire.
   Réponse : (1pt) Soient $P, Q \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) = {} & (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X)\\ & \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X)\\ & \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X)\\ & \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$
   Commentaire : Pas besoin de vérifier que $\varphi(0_E) = 0_E$ (le cas de 0_E doit être traité lorsqu'on montre qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel, mais pas pour montrer la linéarité d'une application).
3. (a) Soit $P \in E$ un élément de $\mathrm{Ker}\varphi$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   Réponse : (1pt) $P \in \mathrm{Ker}\varphi$ donc $P(X+1) = P(X)$. En particulier, $P(1) = P(0)$, $P(2) = P(1) = P(0)$, et plus généralement $P(n) = P(n-1) = ... = P(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi, tous les entiers naturels sont racines de $P - P(0)$.
   Commentaire : En toute rigueur, il faudrait ici faire une démonstration par récurrence.

   (b) En déduire que les éléments de $\mathrm{Ker}\varphi$ sont les polynômes constants.
   Réponse : (1pt) Soit $P \in \mathrm{Ker}\varphi$. D'après la question précédente, $P - P(0)$ admet une infinité de racines, donc il est nul. Cela signifie que P est constant, de valeur $P(0)$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbf{R}_2[X]$.
   Réponse : (1pt) Clairement, pour $P = 1, X$ ou X^2, $\varphi(P)$ est de degré inférieur à 2. De plus, $\varphi(X^3) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$, et est aussi de dégré inférieur à 2. L'image par φ de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E est donc contenue dans $\mathbf{R}_2[X]$, ce qui implique que φ prend toutes ses valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.

   (b) Quelles sont les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}\varphi$ et de $\mathrm{Im}\varphi$?
   Réponse : (1pt) Grâce au résultat de la question 3b), $\mathrm{Ker}\varphi$ est le sous-espace formé par les polynômes constants. Il est donc de dimension 1. On applique ensuite le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim E$. Comme $E = \mathbf{R}_3[X]$, on a $\dim E = 4$, et donc $\dim \mathrm{Im}\varphi = 3$.
   Commentaire : Beaucoup d'erreurs ont été commises pour la dimension de E et/ou $\mathbf{R}_2[X]$. Cela a été pénalisé à hauteur de 0,5pts si le reste était correct.

   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\varphi = \mathbf{R}_2[X]$.
   Réponse : (1pt) Grâce au résultat de la question 4a), $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbf{R}_2[X]$. De plus, grâce au résultat de la question précédente, $\dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbf{R}_2[X]$. On déduit $\mathrm{Im}\varphi = \mathbf{R}_2[X]$.
5. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. Écrire la matrice M de φ relativement à $\mathcal{B}$.
   Réponse : (1pt) On calcule les images par φ des éléments de la base indiquée : $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1$, $\varphi(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1$, et $\varphi(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$ (calcul fait en 4a), à détailler ici sinon). La matrice cherchée est donc
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
   Commentaire : Attention à l'ordre des éléments de la base lorsqu'on écrit la matrice ! Beaucoup de confusions aussi entre les lignes et les colonnes (pénalisation à hauteur de 0,5pt).

6. Soient $Q, R \in E$, respectivement de degré 2 et 3. On note $\mathcal{C}$ la famille $\mathcal{C} = (1, X, Q, R)$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.

Réponse : (1pt) Les éléments de $\mathcal{C}$ ont des degrés tous différents, donc $\mathcal{C}$ est libre. (Ce résultat a été vu en TD, il a été admis de s'y reporter, mais on pouvait aussi le redémontrer.) Par ailleurs, $\mathcal{C}$ est de taille 4, qui est aussi la dimension de E. Elle est donc également génératrice. En conclusion, $\mathcal{C}$ est une base de E.

(b) Déterminer tous les couples de polynômes (Q, R) avec $Q, R \in E$ de sorte que la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{C}$ soit égale à

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse : (2pts) Il s'agit de trouver $Q, R \in E$, respectivement de degré 2 et 3, tels que $\varphi(Q) = X$ et $\varphi(R) = Q$. Commençons par déterminer Q. Comme il est de degré 2, il est de la forme $aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\varphi(Q) = a(2X+1) + b = 2aX + (a+b)$, et $\varphi(Q) = X$ ssi $2a = 1$ et $a + b = 0$, c'est-à-dire $a = 1/2$ et $b = -1/2$. Q est donc de la forme $Q = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$, où c est un réel quelconque. Déterminons maintenant R. Comme il est de degré 3, il est de la forme $a'X^3 + b'X^2 + c'X + d'$ où $a', b', c', d' \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\varphi(R) = a'(3X^2 + 3X + 1) + b'(2X + 1) + c' = 3a'X^2 + (3a' + 2b')X + a' + b' + c'$ et $\varphi(R) = Q$ ssi $3a' = 1/2, 3a' + 2b' = -1/2, a' + b' + c' = c$, c'est-à-dire $a' = 1/6, b' = -1/2, c' = c + 1/3$. R est donc de la forme $\frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + (c + \frac{1}{3}) + d'$, avec d' un réel quelconque.

Commentaire : 1pt attribué pour Q (0,5pt si oubli des constantes), idem pour R. Une erreur commune a été de poser $\varphi(R) = X^2$ (pénalisation à hauteur de 0,5pt si le reste est correct).

(c) Soit (Q, R) satisfaisant la condition de la question précédente, et tel que $Q(0) = R(0) = 0$. Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Réponse : (1pt) Les conditions $Q(0) = R(0) = 0$ signifient que $c = d' = 0$, soit $Q = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$ et $R = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + (c + \frac{1}{3})$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ s'écrit donc :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

(d) Quelle relation existe-t-il entre $MP_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}M'$? Justifiez.

Réponse : (1pt) Par résultat du cours, $M' = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} M P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, donc $MP_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}M'$.

Commentaire : La question indiquait bien de justifier la réponse, aucun point n'a été attribué dans le cas contraire.